UNIVERSAL
LIBRARY

EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

A LA MÊME LIBRAIRIE

DU MÊME AUTEUR

Précis d'Analyse mathématique à l'usage des candidats au certificat de calcul différentiel et intégral. 2 vol. 25/16^{cm}.

Tome I. — Fonctions de variables réelles. Fonctions analytiques. . . . . **32 fr.** »

Tome II (avec la collaboration de M. Bouligand). — Équations différentielles. Géométrie infinitésimale. Équations aux dérivées partielles. **42 fr.** »

Premières leçons de Géométrie analytique et de Géométrie vectorielle, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques et des candidats aux grandes écoles. Vol. 22/14^{cm}. . . . . **4** fr. **50**

Précis de Mécanique rationnelle à l'usage des élèves des Facultés des Sciences, par G. Bouligand, professeur à l'Université de Poitiers. — Vol. 25/16^{cm}.. . **40** fr. »

Compléments et Exercices sur la Mécanique des solides à l'usage des élèves des Facultés des Sciences, par G. Bouligand. — Vol. 25/16^{cm}. . . . . . **20** fr. »

Problèmes d'Agrégation (*Mathématiques élémentaires*), par J. Dollon, professeur agrégé au lycée de Rouen. Recueil de problèmes de mathématiques élémentaires donnés aux concours d'agrégation, avec solutions. — Vol. 22/14^{cm}. . . **15** fr. »

EXERCICES
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

A L'USAGE DES CANDIDATS AU CERTIFICAT

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

PAR

E. LAINÉ

DOCTEUR ÈS SCIENCES

PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES D'ANGERS

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1931



AVERTISSEMENT

Ce volume d'Exercices d'Analyse contient les solutions de la plupart des problèmes proposés à Paris, depuis 1920, aux épreuves écrites du certificat de *Calcul différentiel et intégral.* Sans parler de l'intérêt intrinsèque que présentent, pour les étudiants, ces problèmes en général judicieusement choisis, on a ainsi une série suffisamment variée d'exercices portant sur les différentes parties du programme.

On s'est borné à suivre l'ordre chronologique. Aussi bien conçoit-on sans peine que tout classement revêt nécessairement un caractère artificiel, la solution d'un problème déterminé exigeant d'ordinaire le recours à des théories très diverses. Un tableau synoptique, placé en fin de l'ouvrage, pourra néanmoins rendre quelques services aux étudiants qui désireraient faire des applications d'une théorie particulière, pour en mieux comprendre le sens et la portée.

M. J. Devisme, professeur agrégé de mathématiques au lycée du Havre, a pris la peine de relire les épreuves et de vérifier soigneusement tous les calculs. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma cordiale gratitude.

E. Lainé.

EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Probléme 1.

On considère la famille de sphères S *représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos u - 2y\sin u = v^2$$

où u est un paramètre variable, v une fonction de ce paramètre.

1° *Déterminer la fonction* $v = f(u)$ *de façon que les caractéristiques des sphères* S *soient des cercles de rayon constant* ρ, *et indiquer une génération simple de la surface enveloppe* Σ *de ces sphères ;*

2° *Trouver les trajectoires orthogonales de ces cercles caractéristiques dans le cas particulier où l'on prend* $v = u$.

N. B. — On pourra exprimer les coordonnées (x, y, z) *d'un point de la surface* Σ *au moyen des deux paramètres* u *et* φ, *où* $z = \sin\varphi$.

(*Paris, juin* 1920, *épr. écr. : 1*[re] *quest.*)

1° Les caractéristiques [1] sont définies par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos u - 2y\sin u - v^2 = 0, \tag{1}$$

$$x\sin u - y\cos u - v\frac{dv}{du} = 0, \tag{2}$$

dont la première représente une sphère S de centre I $(\cos u, \sin u, 0)$ et de rayon $R = \sqrt{v^2+1}$, la seconde un plan Π parallèle à Oz. Le point I se projette sur le plan Π en un point ω centre du cercle caractéristique, et l'on a

$$\overline{I\omega}^2 = v^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2, \qquad \text{d'où} \qquad \rho^2 = R^2 - \overline{I\omega}^2 = v^2 + 1 - v^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

Si ρ est constant on aura donc

$$\frac{v\,dv}{\pm\sqrt{v^2+1-\rho^2}} = du, \qquad \text{d'où} \qquad v^2 = (u+a)^2 + \rho^2 - 1,$$

a désignant une constante arbitraire.

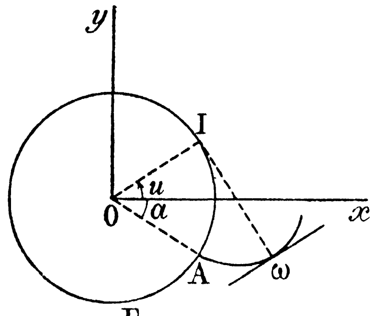
---

[1] II, 107. — Les renvois sont faits au *Précis d'Analyse* de l'auteur, la notation II, 107, par exemple, signifiant qu'il faut se reporter à la page 107 du tome II.

Remarquons que le point I décrit, dans le plan xOy, le cercle Γ de centre O et de rayon *un*. D'autre part l'équation (2) s'écrit

$$x \sin u - y \cos u - (u + a) = 0\,; \tag{3}$$

elle représente dans le plan xOy une droite dont on obtiendra l'enveloppe en joignant à (3) l'équation dérivée



$$x \cos u + y \sin u - 1 = 0,$$

d'où l'on tire pour les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = \cos u + (u + a) \sin u,$$
$$y = \sin u - (u + a) \cos u\,;$$

cette enveloppe est donc la développante du cercle Γ qui a un rebroussement en A.

Par suite la surface Σ, enveloppe des sphères S, peut être engendrée par un cercle vertical de rayon constant, dont le centre ω décrit dans le plan xOy une développante du cercle Γ, et dont le plan est tangent en ω à cette développante.

2° L'enveloppe Σ est ici définie par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cos u - 2y \sin u - u^2 = 0, \qquad x \sin u - y \cos u - u = 0\,;$$

on tire de la seconde

$$x = u \sin u + \lambda \cos u, \qquad y = - u \cos u + \lambda \sin u,$$

puis de la première

$$z^2 = 2\lambda - \lambda^2, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - z^2 = (1 - \lambda)^2\,;$$

si donc on pose $z = \sin \varphi$, $\lambda = 1 + \cos \varphi$, on aura finalement

$$x = u \sin u + (1 + \cos \varphi) \cos u,$$
$$y = - u \cos u + (1 + \cos \varphi) \sin u, \qquad z = \sin \varphi.$$

On aura alors, avec les notations habituelles, en calculant le ds^2 de la surface,

$$E = u^2 + \cos^2\varphi, \qquad F = - u \sin \varphi, \qquad G = 1.$$

Soient d'autre part $d\mathbf{M}$ et $\delta\mathbf{M}$ deux déplacements infiniment petits sur la surface ; on aura

$$d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} d\varphi, \qquad \delta\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \delta\varphi$$

et la condition d'orthogonalité s'écrit

$$d\mathbf{M} \,.\, \delta\mathbf{M} = E du\delta u + F(du\delta\varphi + d\varphi\delta u) + G d\varphi\delta\varphi = 0. \tag{4}$$

Les cercles caractéristiques ont pour équation sur Σ $u = C^{te}$, d'où $\delta u = 0$ ($\delta\varphi \neq 0$) : on aura donc leurs trajectoires orthogonales en remplaçant δu par 0 dans l'équation (4) et divisant par $\delta\varphi$: il reste

$$- u \sin \varphi du + d\varphi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad e^{-\frac{u^2}{2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = C^{te}.$$

Problème 2.

Démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}-2px\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0$$

est un polynome entier en x, lorsque p est un nombre entier positif. Trouver en particulier les intégrales qui s'annulent pour $x=1$ ou pour $x=-1$. Peut-on intégrer l'équation quel que soit le nombre p, entier ou non?

(*Paris, juin* 1920, *épr. écr.*: 2ᵉ *quest.*)

Écrivons les équations déduites de la proposée par dérivations successives :

$$\begin{array}{llllll}
E & (x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} & -2p & x\dfrac{dy}{dx}+p(p+1)y & & =0,\\
E_1 & (x^2-1)\dfrac{d^3y}{dx^3} & -2(p-1)x\dfrac{d^2y}{dx^2} & +(p-1)p\dfrac{dy}{dx} & & =0,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & ,\\
E_{p-1} & (x^2-1)\dfrac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} & -2\,.\,1 & x\dfrac{d^py}{dx^p}+1\,.\,2\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} & & =0,\\
E_p & (x^2-1)\dfrac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}} & & & & =0.
\end{array}$$

Donc y est un polynome de degré $p+1$ au plus.

Soit $y_1(x)$ une intégrale qui s'annule pour $x=1$. D'après E on a $y_1'(1)=0$, d'après E_1 $y_1''(1)=0$, ..., d'après E_{p-1} $y_1^{(p)}=0$; donc, puisque $y_1(x)$ est un polynome de degré $p+1$ au plus s'annulant pour $x=1$ ainsi que ses p premières dérivées, on a

$$y_1(x)=\lambda(x-1)^{p+1}.$$

De même l'intégrale $y_2(x)$ qui s'annule pour $x=-1$ a pour expression

$$y_2(x)=\mu(x+1)^{p+1}.$$

La substitution de y_1 ou y_2 à y dans le premier membre de E donne un résultat qui doit être nul pour toutes les valeurs *entières et positives* de p: donc il est nul identiquement, et l'intégrale générale de E s'écrit

$$y=\lambda(x-1)^{p+1}+\mu(x+1)^{p+1},$$

pourvu que p soit différent de -1. Si $p=-1$, l'équation E est linéaire et du *premier* ordre en y' : son intégrale générale s'écrit

$$y=\lambda\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mu.$$

Problème 3.

On considère la surface qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{(h+z)^2}+\frac{y^2}{(h-z)^2}=\varphi'''(z),$$

dans laquelle h désigne une longueur donnée et $\varphi'''(z)$ *une fonction continue et positive, dérivée troisième d'une fonction impaire* $\varphi(z)$.

1° *Calculer le volume limité par la portion de la surface précédente comprise entre les plans* $z=h$ *et* $z=-h$, *et déterminer la fonction* $\varphi(z)$ *de manière que ce volume soit, quel que soit h, équivalent au volume d'une sphère de rayon h.*

2° *Étant donnée la surface* (S) *définie par les équations*

$$x=(h+z)\cos u, \qquad y=(h-z)\sin u$$

dans lesquelles u est un paramètre variable, calculer l'intégrale

$$\iint (x^2+y^2-3z^2-h^2)\frac{d\sigma}{z},$$

$d\sigma$ *désignant l'élément superficiel de cette surface, étendue à la portion de* (S) *engendrée par les segments des génératrices rectilignes compris entre les plans* $z=h$ *et* $z=-h$, *lorsque u varie de* 0 *à* $\frac{\pi}{4}$.

(*Paris, juin* 1920, *épr. prat.*)

1° Considérons d'une façon générale une surface S, coupée par tout plan $z=C^{te}$ suivant une courbe fermée d'aire A ; cette aire est fonction de z, $A=\theta(z)$. Le volume V limité par la surface S et les deux plans $z=z_0$, $z=z_1 (z_0<z_1)$ peut être considéré comme la somme d'une infinité de petits cylindres de section droite $\theta(z)$ et de hauteur dz ; on aura donc

$$V=\int_{z_0}^{z_1}\theta(z)dz.$$

Dans le présent problème les courbes $z=C^{te}$ sont des ellipses de demi-axes

$$\sqrt{\varphi'''(z)}(h+z) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\varphi'''(z)}(h-z),$$

donc d'aire $\pi(h^2-z^2)\varphi'''(z)$; on aura par suite

$$V=\pi\int_{-h}^{h}(h^2-z^2)\varphi'''(z)dz=\pi\left|h^2\varphi''(z)-z^2\varphi''(z)+2z\varphi'(z)-2\varphi(z)\right|_{-h}^{+h}.$$

Par hypothèse $\varphi(z)$ est une fonction impaire, donc il en est de même de $\varphi''(z)$, tandis que $\varphi'(z)$ est une fonction paire : on aura finalement

$$V = 4\pi[h\varphi'(h) - \varphi(h)].$$

Ce volume sera égal à $\frac{4}{3}\pi h^3$ si φ satisfait à l'équation différentielle

$$h\varphi'(h) - \varphi(h) = \frac{h^3}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{dh}\frac{\varphi}{h} = \frac{h}{3} \qquad \text{et} \qquad \varphi = h\left(\frac{h^2}{6} + \lambda\right).$$

2° La surface (S) est engendrée par une droite qui se déplace en rencontrant constamment le cercle ($z = 0$, $x^2 + y^2 = h^2$) et les deux droites ($x = 0$, $z = -h$) et ($y = 0$, $z = h$).

En prenant comme coordonnées curvilignes u et z, on trouve d'abord, pour les coefficients du ds^2,

$$E = h^2 + z^2 - 2hz\cos 2u, \qquad F = -h\sin 2u, \qquad G = 2,$$

d'où l'on tire (1)

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dz = \sqrt{h^2\sin^2 2u + 2(z - h\cos 2u)^2}\,du\,dz,$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 3z^2 - h^2}{z} = -2(z - h\cos 2u).$$

D'ailleurs u varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, et u étant donné z varie de $-h$ à $+h$; l'intégrale demandée a donc pour expression

$$I = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} du \int_{-h}^{h} (z - h\cos 2u)[h^2\sin^2 2u + 2(z - h\cos 2u)^2]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|[h^2\sin^2 2u + 2(z - h\cos 2u)^2]^{\frac{3}{2}}\right|_{-h}^{+h} du$$

$$= \frac{h^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin^2 2u + 2(1 + \cos 2u)^2]^{\frac{3}{2}} du - \frac{h^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin^2 2u + 2(1 - \cos 2u)^2]^{\frac{3}{2}} du.$$

Posant dans la première intégrale $\sin u = t$, et dans la seconde $\cos u = t$, on a

$$I = \frac{8h^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2 - t^2)^{\frac{3}{2}}(1 - t^2)dt - \frac{8h^3}{3}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2 - t^2)^{\frac{3}{2}}(1 - t^2)dt$$

$$= \frac{8h^3}{3}\int_0^1 (2 - t^2)^{\frac{3}{2}}(1 - t^2)dt,$$

ou, en posant $t = \sqrt{2}\sin\alpha$,

$$I = \frac{8h^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^4\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)d\alpha = \frac{8h^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\alpha)^2\cos 2\alpha\,d\alpha = \frac{2(3\pi + 10)h^3}{9}.$$

---

(1) I, 124.

Problème 4.

Déterminer les courbes planes C *telles que la distance* OM *du point* O, *origine des coordonnées, à un point quelconque* M *de l'une de ces courbes soit moyenne proportionnelle entre la distance d de l'origine à la tangente en* M *et le rayon de courbure de la courbe au point* M.

Il existe en général deux courbes de cette espèce tangentes à une droite donnée en un point donné. Indiquer la forme de ces courbes.

Trouver des familles de courbes C, *dépendant d'une constante arbitraire, telles que les trajectoires orthogonales de ces courbes soient aussi des courbes de même espèce.*

N. B. — Pour intégrer l'équation différentielle du second ordre dont dépend la détermination des courbes C, *on pourra remarquer que, d'après la définition même de ces courbes, il existe une infinité d'équations différentielles du premier ordre de la forme* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ *dont toutes les intégrales sont des courbes* C.

(*Paris, oct.* 1920, *épr. écr. :* 1re *quest.*)

En coordonnées polaires (ρ, φ) on a pour le rayon de courbure R de la courbe C au point $M(\rho, \varphi)$ l'expression

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2|}, \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}, \qquad \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right).$$

D'ailleurs $\operatorname{tg} \widehat{OMP} = \left|\frac{\rho}{\rho'}\right|$ et $\sin \widehat{OMP} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, donc

$$d = OP = OM \sin \widehat{OMP} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

et l'équation différentielle des courbes (C), $\rho^2 = Rd$, s'écrit finalement

$$2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 - \varepsilon(\rho^2 + \rho'^2) = 0, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Prenons d'abord $\varepsilon = +1$; l'équation se réduit à

$$\rho'^2 - \rho\rho'' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = a \qquad \text{et} \qquad \rho = e^{a\varphi + b};$$

une première famille de courbes, soit C_1, est donc formée de spirales logarithmiques de pôle O.

Prenons ensuite $\varepsilon = -1$; l'équation s'écrit

$$\frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2 + \rho'^2} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho'}{\rho} = 2\varphi - \alpha, \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin(2\varphi - \alpha)}{\cos(2\varphi - \alpha)} d\varphi,$$

$$\rho^2 \cos(2\varphi - \alpha) = \beta ;$$

la seconde famille de courbes, soit C_2, est donc formée d'hyperboles équilatères ayant pour centre l'origine O.

Cherchons les courbes C qui admettent un élément de contact donné $(\rho_0, \varphi_0, \rho_0')$ (1).

Pour la première famille on a

$$a = \frac{\rho_0'}{\rho_0}, \qquad b = \log \rho_0 - \frac{\rho_0'}{\rho_0}\varphi_0,$$

donc une seule solution. Pour la seconde famille on a

$$\alpha = 2\varphi_0 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho_0'}{\rho_0}, \qquad \beta = \rho_0^2 \cos(2\varphi_0 - \alpha);$$

à des multiples de 2π près il n'existe que deux valeurs distinctes de α, soient α' et α'', et on peut supposer $\alpha'' = \alpha' + \pi$; si β' et β'' sont les valeurs correspondantes de β on a $\beta'' = -\beta'$, et les courbes

$$\rho^2 \cos(2\varphi - \alpha') = \beta', \qquad \rho^2 \cos(2\varphi - \alpha'') = \beta'',$$

sont identiques. En définitive il existe donc une courbe et une seule de chaque famille ayant un élément de contact donné.

Considérons une famille de ∞^1 courbes C_1, dont nous écrirons l'équation sous la forme

$$\log \rho = a\varphi + b,$$

les paramètres a et b satisfaisant à une certaine relation. Supposons d'abord que a varie quand on passe d'une courbe à une autre; alors on pourra poser $b = A(a)$, et la famille de courbes aura pour équation

$$\log \rho = a\varphi + A(a).$$

Sur chaque courbe de la famille on aura $\frac{\rho'}{\rho} = a$; l'équation différentielle de la famille sera donc

$$\log \rho = \frac{\rho'}{\rho}\varphi + A\left(\frac{\rho'}{\rho}\right),$$

et celle de leurs trajectoires orthogonales

$$\log \rho = -\frac{\rho}{\rho'}\varphi + A\left(-\frac{\rho}{\rho'}\right).$$

Si ces trajectoires sont des courbes C_1, on aura par exemple sur chacune d'elles

$$\frac{\rho}{\rho'} = -k, \qquad \text{d'où} \qquad \log \rho = k\varphi + A(k) \qquad \text{et} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = k = -\frac{1}{k},$$

ce qui est impossible. Si elles sont des courbes C_2 on aura par exemple

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{tg}(2\varphi + k), \qquad \text{d'où} \qquad \log \rho = \varphi \operatorname{tg}(2\varphi + k) + A[\operatorname{tg}(2\varphi + k)];$$

posons $\operatorname{tg}(2\varphi + k) = u$, on aura

$$\frac{\rho}{\rho'} = -u, \qquad \log \rho = \varphi u + A(u), \qquad \frac{du}{d\varphi} = 2(1 + u^2),$$

d'où

$$\frac{\rho'}{\rho} = u + 2\varphi(1 + u^2) + 2(1 + u^2)A'(u) \equiv -\frac{1}{u},$$

$$2A'(u) + \frac{1}{u} + 2\varphi \equiv 0,$$

(1) II, n° 240, p. 167.

et ceci doit avoir lieu identiquement pour toutes les valeurs de u et de φ, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que dans la famille $\log \rho = a\varphi + b$ a ait une valeur bien déterminée, b restant arbitraire. On a une famille de spirales homothétiques dont l'équation différentielle s'écrit $\frac{\rho'}{\rho} = a$; leurs trajectoires orthogonales ont donc pour équation $\log \rho = -\frac{\varphi}{a} + b_1$, ce sont encore des courbes C_1.

On verrait de même que, étant donnée une famille de ∞^1 courbes C_2, telles que le paramètre α change quand on passe d'une courbe à l'autre, les trajectoires orthogonales ne peuvent être ni des courbes C_1 ni des courbes C_2. Pour que les trajectoires orthogonales soient des courbes C, il faut donc prendre α constant : on a alors une famille d'hyperboles homothétiques

$$\rho^2 \cos(2\varphi - \alpha) = C^{te},$$

dont l'équation différentielle s'écrit $\operatorname{arc\,tg} \frac{\rho'}{\rho} = 2\varphi - \alpha$; celle de leurs trajectoires orthogonales est donc $\operatorname{arc\,tg} \frac{\rho'}{\rho} = 2\varphi - \alpha - \frac{\pi}{2}$, d'où l'on tire, pour l'équation de ces trajectoires en termes finis,

$$\rho^2 \sin(2\varphi - \alpha) = C^{te}.$$

Problème 5.

Sachant que l'équation différentielle $dy + f(x,y)dx = 0$ *admet un facteur intégrant de la forme* $Xy + X_1$, *où* X *et* X_1 *sont des fonctions de la variable* x $(X \neq 0)$, *démontrer que la fonction* f *est de la forme* $f = \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}$, A, B, C, D, E *étant des fonctions de* x.

Inversement, étant donnée une équation de cette espèce

$$dy + \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E} dx = 0,$$

trouver à quelles conditions devront satisfaire les fonctions A, B, C, D, E *de la variable* x, *pour que cette équation admette un facteur intégrant de la forme indiquée où* X *et* X_1 *sont des fonctions à déterminer de* x. *En déduire l'intégrale générale.*

(Paris, oct. 1920, épr. écr. : 2e quest.)

Si l'expression $$(Xy + X_1)\,dy + (Xy + X_1)f dx$$
est une différentielle totale exacte, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(Xy + X_1)f\right] \equiv X'y + X_1',$$

d'où, en intégrant, $$(Xy + X_1)f = \frac{X'}{2} y^2 + X_1'y + X_2',$$

X_2 désignant une nouvelle fonction de x, et enfin

$$f = \frac{X'y^2 + 2X_1'y + 2X_2'}{2(Xy + X_1)}.$$

Inversement, considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx}+\frac{Ay^2+By+C}{Dy+E}=0,$$

qui comprend comme cas particulier l'équation de Riccati. Si $Dy+E$ divise Ay^2+By+C on est ramené à une équation linéaire

$$dy+(By+C)dx=0,$$

et on sait que, quelles que soient les fonctions B et C, le premier membre admet le facteur intégrant $e^{\int Bdx}$, ce qui permet d'obtenir par deux quadratures l'intégrale générale sous la forme [1]

$$ye^{\int Bdx}+\int Ce^{\int Bdx}dx=C^{te}.$$

Ce cas écarté, nous avons à déterminer trois fonctions X, X_1 et X_2 telles que l'on ait

(1) $$\frac{Ay^2+By+C}{Dy+E}\equiv\frac{X'y^2+2X_1'y+2X_2'}{2(Xy+X_1)};$$

quand cette détermination sera possible, on aura l'intégrale générale sous la forme

$$\frac{X}{2}y^2+X_1y+X_2=C^{te}.$$

L'identité (1) peut s'écrire

(2) $$2(Ay^2+By+C)(Xy+X_1)\equiv(Dy+E)(X'y^2+2X_1'y+2X_2').$$

Nous distinguerons deux cas suivant que D est nul ou non.

Premier cas : $D\neq 0$. — On peut supposer $D=1$; d'après (2), $Dy+E$ ou $y+E$ doit diviser $Xy+X_1$, et par suite on aura

$$X_1=EX,\qquad 2X(Ay^2+By+C)\equiv X'y^2+2X_1'y+2X_2',$$

d'où $$X'=2AX,\qquad X_1'=BX,\qquad X_2'=CX.$$

On devra donc avoir simultanément

$$\frac{X'}{X}=2A\qquad\text{et}\qquad E'X+EX'=BX,\qquad\text{ou}\qquad\frac{X'}{X}=\frac{B-E'}{E},$$

ce qui exige $$2AE=B-E'.$$

Telle est, si l'on prend $D=1$, la condition que doivent vérifier les coefficients A, B, C et E, et il est clair que cette condition est suffisante. On aura alors X par une quadrature, X_1 sans quadrature ($X_1=EX$), et X_2 par une quadrature. L'intégration de l'équation différentielle n'exige donc dans ce cas que deux quadratures.

Second cas : $D=0$. — On a alors une équation de Riccati, et on peut prendre $E=1$, $A\neq 0$. La relation (2) est impossible, puisque le premier membre est un polynome en y dont le degré est supérieur d'une unité au degré du second membre. Donc l'équation de Riccati ne peut jamais être intégrée par ce procédé.

---

[1] II, 29.

Problème 6.

Calculer l'aire limitée par la courbe dont l'équation est

$$(x^2+y^2)(\alpha^2x^2+y^2)-ay^3=0,$$

dans laquelle a est une longueur donnée et α *un nombre positif donné.*

(*Paris, oct.* 1920, *épr. prat.*)

On voit immédiatement que la courbe considérée est une courbe fermée sans point double, tout entière au-dessus de l'axe Ox, tangente en O à cet axe, et symétrique par rapport à l'axe des y. Passant aux coordonnées polaires (ρ, θ), on met son équation sous la forme

$$\rho=\frac{a\sin^3\theta}{\alpha^2\cos^2\theta+\sin^2\theta};$$

on obtient tous les points de la courbe en faisant varier θ de 0 à π. On aura donc, pour l'aire A limitée par cette courbe,

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\int_0^\pi\rho^2d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6\theta d\theta}{(\alpha^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2},$$

ou, en faisant le changement de variable $\operatorname{cotg}\theta=u$,

$$\mathrm{A}=a^2\int_0^\infty\frac{du}{(u^2+1)^2(\alpha^2u^2+1)^2}=a^2\mathrm{I}.$$

On a, par décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(u^2+1)^2(\alpha^2u^2+1)^2}$$
$$=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{1}{(u^2+1)^2}+\frac{\alpha^4}{(\alpha^2u^2+1)^2}-\frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{\alpha^2}{\alpha^2u^2+1}\right)\right];$$

si donc on pose

$$f(\alpha)=\int_0^\infty\frac{du}{\alpha^2u^2+1},\qquad \varphi(\alpha)=\int_0^\infty\frac{du}{(\alpha^2u^2+1)^2},$$

on aura, en supposant $\alpha\neq1$,

$$\mathrm{I}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\left[\varphi(1)+\alpha^4\varphi(\alpha)-\frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{f(1)-\alpha^2f(\alpha)\right\}\right].$$

Or on a

$$f(\alpha)=\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\frac{d(\alpha u)}{\alpha^2u^2+1}=\frac{\pi}{2\alpha},$$

$$\varphi(\alpha)=\int_0^\infty\frac{du}{\alpha^2u^2+1}-\int_0^\infty\frac{\alpha^2u^2du}{(\alpha^2u^2+1)^2};$$

mais on a aussi
$$f'(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{-2\alpha u^2du}{(\alpha^2u^2+1)^2}=-\frac{\pi}{2\alpha^2},$$

donc
$$\varphi(\alpha)=\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{4\alpha}=\frac{\pi}{4\alpha},$$

et par suite
$$\mathrm{I}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{\pi}{4}(1+\alpha^3)-\frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right]$$
$$=\frac{\pi}{4(1-\alpha^2)^3}\left[(1+\alpha^3)(1-\alpha^2)-4\alpha^2(1-\alpha)\right].$$

L'intégrale restant finie quand α tend vers 1, il faut que le polynome entre crochets soit divisible par $(1-\alpha)^3$; on trouve en effet
$$(1+\alpha)^3(1-\alpha^2)-4\alpha^2(1-\alpha)=(1-\alpha)^3(1+3\alpha+\alpha^2),$$
d'où finalement
$$\mathrm{A}=\frac{\pi a^2(1+3\alpha+\alpha^2)}{4(1+\alpha)^3}.$$

Pour $\alpha=1$ cette expression se réduit à $\frac{5\pi a^2}{32}\cdot$ Comme A est une fonction continue de α, on peut affirmer que, pour $\alpha=1$, on a $\mathrm{A}=\frac{5\pi a^2}{32}\cdot$ Le calcul direct est simplifié par le passage aux intégrales eulériennes[1]; faisons en effet dans l'intégrale
$$\int_0^{\infty}\frac{du}{(u^2+1)^4}$$
le changement de variable $u^2=\frac{t}{1-t}$; elle devient successivement
$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{7}{2}}{\Gamma 4}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}}{3!}=\frac{5}{32}\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\pi}{32}.$$

Problème 7.

On considère les cônes donnés, en coordonnées rectangulaires, par l'équation
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0^2+y_0^2)(z-1)^2,$$
dans laquelle x_0 et y_0 sont deux paramètres.

1° On demande de former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre E qui admet ces cônes pour surfaces intégrales.

---

(1) I, 102.

2° *Effectuer le changement de variables et de fonction défini par les relations*

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z,$$

et former ainsi l'équation aux dérivées partielles du premier ordre E_1 *qui définit* Z *comme fonction de* X *et* Y.

3° *Expliquer pourquoi* E_1 *se décompose en deux équations linéaires et intégrer ces deux équations.* (*Paris, juin* 1921, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° On tire de l'équation proposée[1]

$$(1) \qquad x - x_0 = (x_0^2 + y_0^2)(z-1)p, \qquad y - y_0 = (x_0^2 + y_0^2)(z-1)q,$$

d'où

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_0^2 + y_0^2)^2(z-1)^2(p^2 + q^2) = (x_0^2 + y_0^2)(z-1)^2,$$

et par suite

$$(2) \qquad x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}.$$

Les équations (1) donnent alors

$$x - \frac{p}{p^2 + q^2}(z-1) = x_0, \qquad y - \frac{q}{p^2 + q^2}(z-1) = y_0,$$

et l'équation (2) devient

$$(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) - 2(z-1)(px + qy) + z^2 - 2z = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(E) \qquad (py - qx)^2 + (px + qy - z + 1)^2 - 1 = 0.$$

2° La transformation indiquée est la transformation de contact de Legendre[2]; on a alors

$$P = x, \qquad Q = y,$$

et l'équation (E) prend la forme

$$(E_1) \qquad (PY - QX)^2 = 1 - (Z+1)^2 = -Z(Z+2);$$

cette dernière équation se décompose en deux équations linéaires,

$$PY - QX = \pm\sqrt{-Z(Z+2)},$$

dont l'intégration ne présente aucune difficulté.

3° La transformation de Legendre est une transformation par polaires réciproques, et une telle transformation change les développables en courbes, en particulier les cônes en courbes planes. A la congruence des cônes donnés, intégrale complète de E, correspond donc une congruence de courbes planes formant une intégrale complète de E_1, ce qui exige [3] que E_1 soit une équation linéaire, ou du moins se décompose

[1] II, 263.
[2] II, 176 et 252.
[3] II, 253.

en équations linéaires, admettant pour caractéristiques des courbes planes. On peut dire en outre que les cônes du second degré qui forment l'intégrale complète de E ayant leurs sommets dans le plan $z=1$, les caractéristiques de E_1 seront des coniques dont les plans passeront par le point $X=0$, $Y=0$, $Z=-1$, transformé du plan $z=1$ par la transformation de Legendre. On retrouvera aisément tous ces résultats en intégrant l'équation E_1.

Problème 8.

Soient Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires,* $U(x, y)$ *une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles, des deux variables* x, y. *On demande de déterminer une fonction* $V(x, y, z)$ *des trois variables* x, y, z *de façon que l'intégrale de surface*

$$I=\iint \frac{U(x\cos\alpha+y\cos\beta)+V\cos\gamma}{x^2+y^2}d\sigma$$

étendue à une surface fermée quelconque, ne rencontrant pas l'axe Oz, *soit nulle,* α, β, γ *désignant les angles que fait la direction extérieure de la normale avec les axes.*

La fonction V *satisfaisant à la condition précédente, soit* S *une surface fermée qui coupe* Oz *en deux points* A *et* B, *et* S_1 *la surface obtenue en retranchant de* S *deux portions infiniment petites situées à l'intérieur du cylindre de révolution de rayon* r, *ayant* Oz *pour axe. Trouver la limite de l'intégrale* I *étendue à la surface* S_1, *lorsque le rayon* r *tend vers zéro.*

Cette limite serait-elle la même si l'on retranchait de S *deux portions infiniment petites de surfaces, de forme quelconque, entourant les points* A *et* B *respectivement?*

(*Paris, juin* 1921, *épr. écr.: 2e quest.*)

En désignant par v le volume limité par la surface fermée considérée, et appliquant la formule d'Ostrogradsky [1], on a

$$I=\iiint_v\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{Ux}{x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{Uy}{x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{V}{x^2+y^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Cette intégrale triple ne peut être nulle quel que soit v que si l'élément différentiel est identiquement nul, ce qui donne la condition

$$\frac{\partial V}{\partial z}+x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

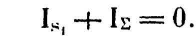
d'où, puisque U ne dépend pas de z,

$$V=\psi(x, y)-z\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{1}$$

ψ désignant une fonction arbitraire.

[1] I, 133.

Soit Σ la surface latérale de la portion de cylindre intérieure à la surface S, qui coupe Oz en A et B, v le volume limité par Σ et S_1. Comme v ne coupe pas Oz, on a, d'après ce qui précède, quand V est de la forme (1),



$$I_{S_1} + I_\Sigma = 0.$$

Prenons dans le plan des xy des coordonnées polaires (r, φ). En tout point de Σ la normale extérieure à S est la normale intérieure au cylindre ; on a donc en un tel point

$$\alpha = \pi + \varphi, \qquad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs, si r est le rayon du cylindre, on a encore, pour tout point de Σ,

$$x = -r\cos\alpha, \qquad y = -r\cos\beta,$$

d'où
$$x\cos\alpha + y\cos\beta = -r \qquad \text{avec} \qquad d\sigma = r\,d\varphi dz,$$

et par suite
$$I_{S_1} = -I_\Sigma = \iint_\Sigma U(x, y)\,d\varphi dz.$$

Faisant tendre r vers zéro et désignant par z_1 et z_2 les cotes de A et B ($z_2 > z_1$), on a finalement

(2)
$$\lim_{r=0} I_{S_1} = 2\pi(z_2 - z_1)U(0, 0).$$

La limite ainsi obtenue est indépendante de $\psi(x,y)$; il est clair qu'il n'en sera pas de même si les éléments infiniment petits retranchés de S au voisinage de A et B ne sont pas situés sur un même cylindre de génératrices parallèles à Oz, car on n'aura plus $\cos\gamma = 0$ en tout point d'un tube entourant Oz et terminé à ces éléments : V interviendra donc nécessairement dans la valeur limite. Par exemple si, S étant tout entière au-dessus du plan des xy, on découpe autour de A et B des éléments infiniment petits au moyen d'un cône de révolution de sommet O et d'axe Oz, on trouvera

$$\lim I_{S_1} = 2\pi(z_2 - z_1)[U(0,0) - \psi(0,0)].$$

Mais si les éléments entourant A et B sont situés sur un cylindre de génératrices parallèles à Oz, la limite sera toujours donnée par la formule (2). En effet soient $M(r,\varphi)$ un point de la section droite du cylindre par le plan $z = 0$, s l'arc de cette section, p la distance de l'origine à la tangente en M à la section ; on aura d'abord

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = -p, \qquad \cos\gamma = 0, \qquad d\sigma = ds\,dz,$$

puis en évaluant de deux façons l'aire limitée par la section et deux rayons infiniment voisins OM et OM', faisant entre eux l'angle $d\varphi$ et découpant sur la section l'arc ds,

$$p\,ds = r^2 d\varphi,$$

d'où
$$I_\Sigma = -\iint_\Sigma U(x,y)\,d\varphi dz\,;$$

on retrouvera donc bien la formule (2).

Problème 9.

Calculer l'intégrale définie

$$J(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2},$$

dans laquelle α *désigne un nombre réel positif.*

Trouver la partie principale de l'infiniment grand $J(\alpha)$ *lorsqu'on prend* α *comme infiniment petit principal. — Peut-on déterminer cette partie principale sans calculer l'expression générale de* $J(\alpha)$?

(*Paris, juin* 1921, *épr. prat.*)

En considérant x^2 comme la variable indépendante et effectuant la décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}=\frac{1}{(\alpha^4+1)^2}\left[\frac{-2\alpha^2x^2}{x^4+1}+\frac{\alpha^4-1}{x^4+1}+\frac{2\alpha^2}{x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha^4+1}{(x^2+\alpha^2)^2}\right].$$

Le changement de variable $x=\dfrac{1}{t}$ montre d'abord que

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}=\int_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4+1}.$$

Faisons dans la première intégrale le changement de variable

$$x^4=\frac{t}{1-t},$$

d'où $\quad x^4+1=\dfrac{1}{1-t},\qquad 4x^3dx=\dfrac{dt}{(1-t)^2},\qquad dx=\dfrac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{5}{4}}dt;$

on aura(¹)

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^4+1}=2\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part on a successivement

$$f(\alpha)=\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha},\qquad f'(\alpha)=-2\alpha\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}=-\frac{\pi}{2\alpha^2},$$

d'où

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}=\frac{\pi}{4\alpha^3},$$

et finalement on obtient

$$J(\alpha)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2\alpha^7-4\alpha^5+5\alpha^4\sqrt{2}-2\alpha^3+\sqrt{2}}{\alpha^3(\alpha^4+1)^2}.$$

(¹) I, 102.

Remarquons en passant que l'intégrale $J(\alpha)$ étant évidemment positive, le polynome qui figure au numérateur dans la formule précédente doit être positif en même temps que α. Il suffit, pour le vérifier, d'écrire ce polynome sous la forme

$$2\alpha^3(\alpha^2-1)^2+5\alpha^4\sqrt{2}-4\alpha^3+\sqrt{2};$$

on s'assure aisément que le minimum de $5\alpha^4\sqrt{2}-4\alpha^3+\sqrt{2}$ est positif.

Dans le voisinage de $\alpha=0$, on a, en développant $\frac{1}{(1+\alpha^4)^2}$,

$$J(\alpha)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-2\alpha^3+5\alpha^4\sqrt{2}-4\alpha^5+2\alpha^7)\alpha^{-3}(1-2\alpha^4+\cdots)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^3}+\cdots:$$

la partie principale de l'infiniment grand $J(\alpha)$ est donc $\frac{\pi}{2\alpha^3}$.

On peut retrouver directement cette partie principale sans effectuer le calcul qui donne $J(\alpha)$; écrivons en effet

$$\frac{J}{2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}-\int_0^{\infty}\frac{x^4dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Quand α tend vers zéro la seconde intégrale reste finie; la partie infinie de $J(\alpha)$ ne peut donc provenir que de l'intégrale $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$, qui a pour valeur $\frac{\pi}{4\alpha^3}$: on retrouve bien la partie principale $\frac{\pi}{2\alpha^3}$.

Problème 10.

On considère la famille de surfaces S *représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x(x^2+y^2+z^2)+Cy^2=0,$$

où C *désigne une constante arbitraire.*

On demande l'équation générale des surfaces qui coupent orthogonalement en chacun de leurs points la surface S *qui passe par ce point. Démontrer qu'il existe une famille de sphères* S_1, *dépendant d'un paramètre, qui satisfait à cette condition. Il existe une autre famille de surfaces* S_2, *formant avec les surfaces* S *et* S_1 *un système triple orthogonal. Trouver cette famille de surfaces* S_2.

(*Paris, oct.* 1921, *épr. écrit.: 1re quest.*)

L'équation des surfaces S étant mise sous la forme

$$F(x, y, z)\equiv\frac{x(x^2+y^2+z^2)}{y^2}=C^{te},$$

l'équation aux dérivées partielles de leurs trajectoires orthogonales s'écrira

$$p\frac{\partial F}{\partial x}+q\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

c'est-à-dire

$$(1)\qquad py(3x^2+y^2+z^2)-2qx(x^2+z^2)=2xyz.$$

Le changement de variables

$$X = x^2, \qquad Y = y^2, \qquad Z = z^2$$

ramène cette équation à

$$P(3X + Y + Z) - 2Q(X + Z) = 2Z,$$

dont le système caractéristique

$$\frac{dX}{3X + Y + Z} = \frac{-dY}{2(X + Z)} = \frac{dZ}{2Z} = \frac{dX + dY + dZ}{X + Y + Z} = \frac{2dX + dY}{4X + 2Y}$$

admet les combinaisons intégrables

$$d\frac{X + Y + Z}{\sqrt{Z}} = 0 \qquad \text{et} \qquad d\frac{2X + Y}{Z} = 0.$$

Revenant aux anciennes variables on voit que l'intégrale générale de l'équation (1) s'écrit

$$\theta\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \frac{2x^2 + y^2}{z^2}\right) = 0.$$

En particulier on voit que les sphères S_1,

$$F_1 \equiv \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C^{te},$$

qui ont leurs centres sur Oz et passent par l'origine, coupent orthogonalement les surfaces S.

Etant données deux familles de surfaces

$$F(x,y,z) = C^{te}, \qquad F_1(x,y,z) = C^{te},$$

trajectoires orthogonales l'une de l'autre, cherchons à quelle condition il existera une troisième famille $\varphi(x,y,z) = C^{te}$ formant avec les deux premières un système triple orthogonal[1]. On devra avoir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\varphi_x}{\frac{D(F,F_1)}{D(y,z)}} = \frac{\varphi_y}{\frac{D(F,F_1)}{D(z,x)}} = \frac{\varphi_z}{\frac{D(F,F_1)}{D(x,y)}},$$

c'est-à-dire que l'équation aux différentielles totales

$$\frac{D(F,F_1)}{D(y,z)}dx + \frac{D(F,F_1)}{D(z,x)}dy + \frac{D(F,F_1)}{D(x,y)}dz = 0$$

devra être complètement intégrable, et son intégrale générale donnera la troisième famille du système.

Appliquons ceci à nos surfaces S et S_1; l'équation aux différentielles totales s'écrira

$$2x(z^2 - x^2)dx + y(z^2 - 3x^2 - y^2)dy - 2z(2x^2 + y^2)dz = 0,$$

(1) II, 135.

ou encore, en revenant à nos variables X, Y, Z,

$$2(Z-X)dX+(Z-3X-Y)dY-2(2X+Y)dZ=0.$$

Cette équation est équivalente aux deux suivantes

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{Z-X}{2X+Y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y}=\frac{Z-3X-Y}{2(2X+Y)}.$$

La première s'intègre aisément et donne

$$Z=\sqrt{2X+Y}\varphi(Y)-X-Y,$$

φ désignant une fonction arbitraire; portant dans la seconde on obtient $\varphi'=0$. L'équation aux différentielles totales est donc bien intégrable, et son intégrale générale s'écrit

$$\frac{X+Y+Z}{\sqrt{2X+Y}}=C^{te};$$

les surfaces cherchées S_2 sont donc définies par l'équation

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{2x^2+y^2}}=C^{te}.$$

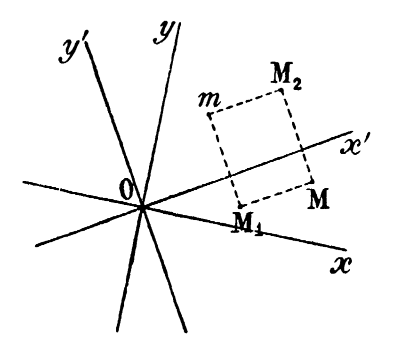
Problème 11.

On donne dans un plan deux systèmes d'axes rectangulaires (Ox, Oy) *et* (Ox', Oy') *de même origine et même disposition.*

Soient m *et* M *deux points de ce plan dont les coordonnées par rapport aux axes* Ox, Oy *sont respectivement* (x, y) *et* (X, Y); *on suppose que ces deux points se correspondent par une transformation ponctuelle définie par les formules*

$$X=P(x, y), \qquad Y=Q(x, y).$$

Par les points m *et* M *on mène des parallèles aux axes* Ox' *et* Oy', *et on détermine ainsi un rectangle dont les deux autres sommets opposés sont* M_1 *et* M_2.



Lorsque le point m *décrit une région* r *du plan, les points* M_1 *et* M_2 *décrivent deux régions correspondantes* R_1 *et* R_2. *On demande à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions* P *et* Q *pour que les aires des deux régions* R_1 *et* R_2 *soient égales, quelle que soit la région* r *et quel que soit l'angle* α *des deux axes* Ox, Ox'.

On distinguera les deux cas possibles suivant les dispositions respectives des figures décrites par les points M_1 *et* M_2.

N. B. — On désigne par (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *les coordonnées des deux points* M_1 *et* M_2 *par rapport au second système d'axes* Ox', Oy'.

(*Paris, oct.* 1921, *épr. écr.: 2e quest.*)

Désignons par (x', y') et (X', Y') les coordonnées de m et M par rapport au second système d'axes. On aura

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad X' = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \qquad Y' = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

et par suite

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad x_2 = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$y_1 = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \qquad y_2 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Soient A_1 et A_2 les aires des régions R_1 et R_2 ; on aura

$$A_1 = \iint_r \left|\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}\right| dxdy, \qquad A_2 = \iint_r \left|\frac{D(x_2, y_2)}{D(x, y)}\right| dxdy,$$

et l'égalité $A_1 = A_2$ ne peut avoir lieu quelle que soit la région r que si l'on a

$$\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} = \varepsilon\frac{D(x_2, y_2)}{D(x, y)},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que les contours de R_1 et R_2 sont décrits par les points M_1 et M_2 dans le même sens ou non[1].

Tous calculs faits, la relation ci-dessus s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial x}\sin^2\alpha - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos^2\alpha$$
$$= \varepsilon\left[\frac{\partial P}{\partial x}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\sin^2\alpha\right]$$

Pour que cette condition soit satisfaite pour toute valeur de α, il faudra donc que l'on ait :

1° si $\varepsilon = +1$, $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$;

dans ce cas $P + iQ$ est une fonction analytique ;

2° si $\varepsilon = -1$, $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Problème 12.

On considère l'intégrale

$$I = \iint (1 + x^2)\varphi(x)dydz + 2xy\varphi(x)dzdx - 3zdxdy$$

étendue à une portion de surface limitée par une courbe fermée C.

1° *Déterminer la fonction* $\varphi(x)$, *nulle pour* $x = 0$, *de façon que l'intégrale* I *ne dépende que du contour* C.

[1] I, 115.

2° *Montrer que, dans ce cas, l'intégrale* I *est égale à l'intégrale curviligne*

$$J = \int \frac{2x^2(x^2+3)yz}{(x^2+1)^2}dx - \frac{x(x^2+3)z}{x^2+1}dy$$

étendue à la courbe C.

3° *Calculer la valeur de* J *lorsque la courbe* C *est la circonférence représentée par les équations*

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = 1.$$

(*Paris, oct.* 1921, *épr. prat.*)

1° Nous raisonnerons sur une courbe fermée C sans point double. Considérons une surface fermée Σ sans ligne double, présentant deux côtés distincts, et telle que la courbe C supposée tracée sur Σ la partage en deux régions Σ_1 et Σ_2. Déformons, par *renfoncement*, la portion Σ_2 en laissant Σ_1 et C invariables : par hypothèse I_{Σ_2} ne change pas ; supposons que le côté intérieur de Σ_2 vienne coïncider avec le côté intérieur de Σ_1 ; on aura

$$I_{\Sigma_1} = - I_{\Sigma_2},$$

les deux intégrales étant supposées prises sur le côté extérieur de Σ. On avait donc, avant toute déformation,

$$I_\Sigma = I_{\Sigma_1} + I_{\Sigma_2} = 0 ;$$

autrement dit l'intégrale I étendue à toute surface fermée Σ sans ligne double est nulle.

En appelant V le volume limité par une telle surface et appliquant la formule d'Ostrogradsky (¹), on aura donc

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2)\varphi + \frac{\partial}{\partial y}2xy\varphi - 3\right] dxdydz = 0.$$

Cette relation ne peut avoir lieu quel que soit V que si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2)\varphi + \frac{\partial}{\partial y}2xy\varphi - 3 = 0,$$

c'est-à-dire si φ satisfait à l'équation différentielle

$$(1+x^2)\frac{d\varphi}{dx} + 4x\varphi(x) - 3 = 0.$$

C'est une équation linéaire qui s'intègre aisément ; l'intégrale qui s'annule pour $x = 0$ a pour expression

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

2° On a, d'après la formule de Stokes (²),

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

(¹) I, 133.
(²) I, 130.

Dans le cas présent on veut avoir $R = 0$: il faudra donc déterminer les fonctions $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$ par les conditions

$$(1) \qquad -\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{x(x^2+3)}{x^2+1}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2x^2y(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3z,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{2x^2yz(x^2+3)}{(x^2+1)^2} + p(x, y), \qquad Q = -\frac{xz(x^2+3)}{x^2+1} + q(x, y);$$

la dernière condition (1) se réduit à $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0$: on peut donc prendre $p = q = 0$, et l'intégrale I est ramenée à l'intégrale curviligne J de l'énoncé.

3e Le long de la circonférence $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, on a

$$J = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2\cos^2 t(3+\cos^2 t)\sin^2 t}{(1+\cos^2 t)^2} - \frac{(3+\cos^2 t)\cos^2 t}{1+\cos^2 t} \right] dt.$$

Au lieu de calculer cette intégrale il est plus simple de revenir à l'intégrale I qui lui est égale. Si l'on intègre en effet sur la face supérieure du plan $z = 1$, on aura, en désignant par $d\sigma$ l'élément d'aire du cercle,

$$dydz = 0, \qquad dzdx = 0, \qquad dxdy = d\sigma,$$

et par suite

$$J = I = \iint -3d\sigma = -3\pi.$$

Problème 13.

Soit S *la surface enveloppe des sphères* Σ *représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2;$$

α *et* β *sont deux paramètres variables,* R *une fonction positive* $f(\alpha, \beta)$ *de ces deux paramètres.*

1° *En un point* M *où la sphère* Σ *correspondant aux valeurs* α, β *des paramètres touche la surface enveloppe* S, *on mène la normale qui rencontre les plans de coordonnées* xOy, yOz, zOx *aux points* A, B, C *respectivement. On demande d'exprimer les segments* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *au moyen de* α, β, $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial R}{\partial \beta}$, *ces segments étant comptés en adoptant comme direction positive celle qui va du point* A *au point* M *sur la normale.*

2° *Démontrer que l'on peut toujours déterminer par une quadrature toutes les surfaces* S *telles qu'il existe entre les segments* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *et* R *une relation donnée de forme arbitraire* $F(R, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$.

3° *On demande à quelle condition doivent satisfaire les deux fonctions* $\varphi(R)$ *et* $\psi(R)$ *pour qu'il existe une surface* S *telle que les segments* $\overline{AB}$ *et* $\overline{AC}$ *vérifient les deux relations* $\overline{AB} = \varphi(R)$, $\overline{AC} = \psi(R)$.

4° *Déterminer en particulier les surfaces* S *pour lesquelles on a*

$$\overline{AC} = R + a, \qquad \overline{AB} = m(R + a),$$

a et m étant des constantes données, et indiquer une génération géométrique de ces surfaces. (*Paris, juin* 1922, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° Soient A(α, β, 0) le centre d'une sphère Σ, M(x, y, z) l'un des points où cette sphère touche S; AM est normale en M à S, et coupe les plans yOz et zOx en B et C; on a d'ailleurs pour le point M [1]

$$x - \alpha = -R\frac{\partial R}{\partial \alpha}, \qquad x_M = \alpha - RR_\alpha,$$

$$y - \beta = -R\frac{\partial R}{\partial \beta}, \qquad y_M = \beta - RR_\beta.$$

Ceci posé, on peut écrire

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{x_B - x_A}{x_M - x_A} = \frac{\alpha}{RR_\alpha}, \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{y_C - y_A}{y_M - y_A} = \frac{\beta}{RR_\beta},$$

d'où, puisque $\overline{AM} = R$,

$$\overline{AB} = \frac{\alpha}{R_\alpha}, \qquad \overline{AC} = \frac{\beta}{R_\beta}.$$

2° Posant $\alpha = X$, $\beta = Y$, $R = Z$, $R_\alpha = P$, $R_\beta = Q$,

on voit qu'il s'agit de montrer que l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \varphi\left(Z, \frac{P}{X}, \frac{Q}{Y}\right) = 0$$

se ramène toujours à une quadrature. Écrivons $\frac{P}{X} = u$, $\frac{Q}{Y} = v$, et formons le système caractéristique

$$\frac{dX}{\frac{1}{X}\varphi_u} = \frac{dY}{\frac{1}{Y}\varphi_v} = \frac{dZ}{\frac{P}{X}\varphi_u + \frac{Q}{Y}\varphi_v} = \frac{dP}{-\frac{P}{X^2}\varphi_u + P\varphi_z} = \frac{dQ}{-\frac{Q}{Y^2}\varphi_v + Q\varphi_z}.$$

On aperçoit la combinaison intégrable

$$\frac{\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}}{\frac{1}{X^2}\varphi_u - \frac{1}{Y^2}\varphi_v} = \frac{\frac{dP}{P} - \frac{dQ}{Q}}{\frac{1}{X^2}\varphi_u - \frac{1}{Y^2}\varphi_v},$$

qui donne

$$\frac{P}{X} = a\frac{Q}{Y};$$

on tire alors de (1) $\qquad P = aX\theta(Z), \qquad Q = Y\theta(Z),$

θ désignant une fonction de Z bien déterminée, et par suite

$$\frac{dZ}{\theta(Z)} = aXdX + YdY,$$

[1] II, 111.

d'où l'on déduit, par une quadrature, l'intégrale complète

$$aX^2 + Y^2 - 2\int \frac{dZ}{\theta(Z)} = 0.$$

3° Les fonctions $\varphi(R)$ et $\psi(R)$ doivent être telles que le système

$$\varphi(R)\frac{\partial R}{\partial \alpha} - \alpha = 0, \qquad \psi(R)\frac{\partial R}{\partial \beta} - \beta = 0,$$

soit compatible. On tire de la première équation

$$\varphi' R_\alpha R_\beta + \varphi R_{\alpha\beta} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad R_{\alpha\beta} = -\frac{\varphi'}{\varphi} R_\alpha R_\beta = -\frac{\varphi'\alpha\beta}{\varphi^2\psi}.$$

et de la seconde $\qquad R_{\alpha\beta} = -\dfrac{\psi'\alpha\beta}{\varphi\psi^2},$

d'où la condition de compatibilité

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi'}{\psi}, \qquad \varphi(R) = m\psi(R).$$

4° Si l'on prend

$$\psi(R) = R + a, \qquad \varphi(R) = m(R + a),$$

on aura $\qquad dR = \dfrac{\partial R}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial R}{\partial \beta} d\beta = \dfrac{\alpha d\alpha}{m(R + a)} + \dfrac{\beta d\beta}{R + a},$

et par suite

(2) $$(R + a)^2 = \frac{\alpha^2}{m} + \beta^2 + b.$$

Les équations paramétriques de S s'écriront alors

$$x = \alpha - R\frac{\partial R}{\partial \alpha}, \qquad y = \beta - R\frac{\partial R}{\partial \beta}, \qquad z = \pm R\sqrt{1 - \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial R}{\partial \beta}\right)^2},$$

R étant remplacé par sa valeur tirée de (2).

La normale en M a pour équations

$$\frac{x - \alpha}{x_M - \alpha} = \frac{y - \beta}{y_M - \beta} = \frac{z}{z_M},$$

ou encore $\qquad \dfrac{x - \alpha}{R_\alpha} = \dfrac{y - \beta}{R_\beta} = \dfrac{z}{\varepsilon\sqrt{1 - R_\alpha^2 - R_\beta^2}};$

elle coupe donc le plan zOx au point C de coordonnées

$$x = \alpha - \beta\frac{R_\alpha}{R_\beta} = \alpha\left(1 - \frac{1}{m}\right),$$

$$z = -\varepsilon\frac{\beta}{R_\beta}\sqrt{1 - R_\alpha^2 - R_\beta^2}$$

$$= \pm\sqrt{(R + a)^2 - (R + a)^2R_\alpha^2 - (R + a)^2R_\beta^2} = \pm\sqrt{\alpha^2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\right) + b}.$$

Le point C décrit donc dans le plan zOx la conique $x^2 - (m - 1)(z^2 - b) = 0$ et comme on a d'ailleurs $\overline{MC} = \overline{MA} + \overline{AC} = a$, S est une surface canal, enveloppe des ∞^1 sphères de centre C et de rayon a.

Problème 14.

Étant donnée une équation différentielle du second ordre de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + a(x, y)\frac{dy}{dx} + b(x, y) = 0,$$

on demande d'indiquer une méthode permettant de reconnaître si cette équation admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$(2) \qquad f(x, y)\frac{dy}{dx} + \varphi(x, y) = \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire, et de déterminer les fonctions f et φ.

Examiner en particulier le cas où $b = 0$ et montrer que l'équation (1) s'intègre alors par des quadratures.

(*Paris, juin 1922, épr. écr. : 2e quest.*)

Dérivons l'équation (2); nous aurons une équation du second ordre

$$(3) \qquad y''f(x, y) + (f_x + y'f_y)y' + \varphi_x + y'\varphi_y = 0.$$

Pour que l'équation (2) soit une intégrale intermédiaire de (1), il faut et il suffit que l'équation (1) soit identique à (3). Ceci exige d'abord

$$f_y = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f = \mathrm{X}(x) \neq 0,$$

puis

$$\mathrm{X}a = \mathrm{X}' + \varphi_y, \qquad \mathrm{X}b = \varphi_x.$$

Tout revient à exprimer qu'il existe une fonction $\mathrm{X}(x)$ telle que les équations

$$(4) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathrm{X}b(x, y), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mathrm{X}a(x, y) - \mathrm{X}'$$

soient compatibles, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$(5) \qquad \mathrm{X}'a + \mathrm{X}\frac{\partial a}{\partial x} - \mathrm{X}'' = \mathrm{X}\frac{\partial b}{\partial y}.$$

On tire successivement de l'équation (5)

$$\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}a + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} = \frac{\partial b}{\partial y},$$

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}.$$

1er CAS : $\frac{\partial a}{\partial y} = 0.$

On a alors $a = \mathrm{X}_0(x)$ et $\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = 0$, d'où

$$b = \mathrm{X}_1 y + \mathrm{X}_2,$$

et l'équation (1) est une équation linéaire

$$y'' + X_0 y' + X_1 y + X_2 = 0. \tag{7}$$

L'équation (5) s'écrit

$$X'' - X' X_0 + X(X_1 - X_0') = 0\,; \tag{8}$$

si l'on en connaît une intégrale particulière X, on aura d'après (4)

$$\varphi(x,y) = (XX_0 - X')y + \int XX_2 dx,$$

et l'intégrale intermédiaire (2) sera une équation linéaire qu'on intégrera par deux quadratures.

L'équation (8) s'appelle l'équation *adjointe* de (7). On voit donc que l'on peut intégrer par des quadratures une équation linéaire telle que (7) quand on connaît une intégrale particulière de son adjointe, résultat d'ailleurs classique.

2me CAS : $\dfrac{\partial a}{\partial y} \neq 0.$

On tire alors de l'équation (6)

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\dfrac{\partial^2 b}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial a}{\partial y}} = 0,$$

ou encore en posant

$$\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} = u(x,y),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0\,; \tag{9}$$

c'est une première relation que doivent vérifier les fonctions a et b. Cette relation étant supposée vérifiée, la fonction $X(x)$ définie par l'équation

$$\frac{X'}{X} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial a}{\partial y}} \tag{10}$$

devra satisfaire à l'équation (5), ce qui exigera une nouvelle relation entre a et b. Pour la former, il suffit d'écrire l'équation (5) sous la forme

$$\frac{X'}{X} a - u = \frac{X''}{X} = \frac{d}{dx}\left(\frac{X'}{X}\right) + \left(\frac{X'}{X}\right)^2,$$

ce qui donne, après remplacement de $\dfrac{X'}{X}$ par sa valeur (10),

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(a\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

Les équations (9) et (11) expriment les conditions nécessaires et suffisantes

pour que l'équation (1) admette une intégrale intermédiaire de la forme (2); il reste alors, pour obtenir cette intégrale intermédiaire, à déterminer X par une quadrature au moyen de (10), puis à intégrer le système (4), ce qui n'exige encore que des quadratures.

Cas particulier : $b = 0$. — Alors si $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$, l'équation (7) se réduit à

$$y'' + X_0 y' = 0,$$

et s'intègre évidemment par des quadratures.

Si $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, l'équation (10) montre qu'on peut déterminer une fonction $Y(y)$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{Y''}{X}, \qquad \text{d'où} \qquad Xa = Y' + \xi(x),$$

et l'on tire alors de (5), en ajoutant au besoin une constante à Y', ce qui ne change pas Y'',

$$\xi = X', \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{X' + Y'}{X}.$$

L'équation (1) s'écrira donc

$$Xy'' + (X' + Y')y' = 0,$$

d'où l'on tire

$$Xy' + Y = 0 \qquad \text{et enfin} \qquad \int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y} = 0;$$

l'intégration est bien ramenée aux quadratures (Noter que Y contient une constante additive arbitraire).

Problème 15.

Soit Σ la surface réglée engendrée par la droite D dont les équations en coordonnées rectangulaires sont

(1) $$x = \alpha z + 2\alpha\varphi(\alpha) - f(\alpha), \qquad y = f(\alpha)z + \alpha\varphi^2(\alpha),$$

α étant un paramètre variable, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions de ce paramètre.

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les deux fonctions $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ pour que la surface Σ soit une surface développable. Démontrer qu'il existe deux familles distinctes de surfaces développables de cette espèce.

2° Les arêtes de rebroussement de l'une de ces deux familles de développables sont situées sur une surface du second degré dont on demande l'équation. En déduire une définition géométrique des deux familles de développables.

3° Trouver les développables de l'une des deux familles qui passent par la parabole représentée par les deux équations

$$z = 0, \qquad x + y^2 = 0.$$

(Paris, oct. 1922, épr. écr. : 1re quest.)

1° D'une façon générale, pour qu'une droite d'équations

$$x = a(\alpha)z + p(\alpha), \qquad y = b(\alpha)z + q(\alpha)$$

engendre une développable, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$a'(\alpha)q'(\alpha) - b'(\alpha)p'(\alpha) = 0.$$

Cette relation s'écrit dans le cas présent

$$\varphi^2 + 2\alpha\varphi\varphi' + f'^2 - 2f'(\varphi + \alpha\varphi') = 0,$$

ou encore

$$(2\alpha\varphi' + \varphi - f')(\varphi - f') = 0.$$

En annulant successivement chacun des facteurs du premier membre, on aura bien deux familles distinctes de développables, dépendant chacune d'une fonction arbitraire.

Prenons d'abord $\varphi = f'$; on obtiendra la famille de surfaces Σ_1 définie par les équations

$$(\Sigma_1) \qquad x = \alpha z + 2\alpha f' - f(\alpha), \qquad y = f(\alpha)z + \alpha f'^2.$$

Prenons ensuite $2\alpha\varphi' + \varphi - f' = 0$. On peut exprimer sans quadratures f et φ au moyen d'une fonction unique en posant

$$\varphi = h'(\alpha), \qquad \text{d'où} \qquad f = 2\alpha h' - h\,;$$

on aura donc, pour la seconde famille de développables Σ_2, les équations

$$(\Sigma_2) \qquad x = \alpha z + h(\alpha), \qquad y = (2\alpha h' - h)z + \alpha h'^2.$$

2° Pour obtenir l'arête de rebroussement d'une surface Σ_1, il suffit d'adjoindre aux équations (Σ_1) celle qu'on déduit de l'une d'elles au moyen d'une dérivation par rapport à α (¹). On a ainsi, par exemple,

$$0 = z + f' + 2\alpha f'',$$

d'où, pour les équations de l'arête de rebroussement,

$$x = -2\alpha^2 f'' + \alpha f' - f, \qquad y = -2\alpha f f'' + \alpha f'^2 - f f', \qquad z = -f' - 2\alpha f''.$$

La fonction f étant arbitraire, il est visible qu'on ne peut pas éliminer α, f, f' et f'' entre ces trois équations; les arêtes de rebroussement de la famille Σ_1 n'engendrent donc pas une surface.

On trouve de même, pour les arêtes de rebroussement de la famille Σ_2, les équations

$$x = h - \alpha h', \qquad y = h'(h - \alpha h'), \qquad z = -h',$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation

$$y + xz = 0,$$

équation d'un paraboloïde hyperbolique P sur lequel sont tracées toutes les arêtes de rebroussement des surfaces Σ_2.

Il en résulte que les deux équations (1) représentent toutes les droites tangentes

(¹) II, 109.

au paraboloïde P : ce sont les équations d'un complexe spécial [1]. Les surfaces Σ_1 sont les développables circonscrites à P ; par exemple en prenant $f' = C^{te}$ on obtiendra, il est facile de le constater, les plans tangents à P. Les surfaces Σ_2 sont obtenues en prenant sur P une courbe quelconque Γ, et en construisant la développable dont Γ est l'arête de rebroussement.

3° Écrivons que la surface Σ_1 passe par la parabole

$$(2) \qquad z = 0, \qquad x + y^2 = 0\,;$$

il suffit d'éliminer x, y, z entre les équations (Σ_1) et (2), ce qui conduit à l'équation

$$2\alpha f' - f + \alpha^2 f'^4 = 0.$$

Posons $\alpha = t^2, \qquad f(\alpha) = g(t)\,;$

cette équation prend la forme

$$(3) \qquad tg' - g + \frac{g'^4}{16} = 0\,;$$

c'est une équation de Clairaut. Son intégrale générale s'écrit

$$g = at + \frac{a^4}{16}, \qquad \text{d'où} \qquad f(\alpha) = a\sqrt{\alpha} + \frac{a^4}{16}\,;$$

les arêtes de rebroussement des surfaces Σ_1 correspondantes se réduisent aux points

$$x = -\frac{a^4}{16}, \qquad y = \frac{a^2}{4}, \qquad z = 0\,;$$

ces surfaces sont donc des cônes ayant leurs sommets sur la parabole et circonscrits à P, elles ne sont que des solutions *impropres* de notre problème. L'intégrale singulière de l'équation (3) va nous donner la vraie solution, qui sera évidemment l'enveloppe de ces cônes ; cette intégrale singulière s'écrit

$$y = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{4t^4}, \qquad \text{d'où} \qquad f(\alpha) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{4\alpha^2},$$

et il n'y a plus qu'à remplacer $f(\alpha)$ par cette valeur dans les équations (Σ_1) pour avoir la surface Σ_1 qui contient la parabole donnée ; en posant $\alpha = 4\beta^3$, on trouve

$$x = 4\beta^3 z - \beta^2, \qquad y = -3\beta^2 z + \beta.$$

L'arête de rebroussement est la cubique gauche

$$x = -\frac{\beta^2}{3}, \qquad y = \frac{\beta}{2}, \qquad z = \frac{1}{6\beta}.$$

En procédant de la même façon pour la famille Σ_2, on aura, pour déterminer la fonction $h(\alpha)$, à intégrer l'équation différentielle

$$(4) \qquad h + \alpha^2 h'^4 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad h = -\left[\frac{3}{2}\left(a - \alpha^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{4}{3}}$$

En posant $\dfrac{3}{2}\left(a - \alpha^{\frac{1}{2}}\right) = t^3, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \dfrac{(3a - 2t^3)^2}{9},$

on aura $$h = -t^4, \qquad \frac{dh}{d\alpha} = \frac{3t}{3a - 2t^3}.$$

---

[1] II, 182.

Les surfaces Σ_2 qui passent par la parabole forment donc une famille a un paramètre représentée par les équations

$$x = \frac{(3a - 2t^3)^2}{9} z - t^4, \qquad y = \frac{6at - t^4}{3} z + t^2.$$

Les arêtes de rebroussement, définies par les équations

$$x = -\frac{t(t^3 + 3a)}{3}, \qquad y = \frac{t^2(t^3 + 3a)}{2t^3 - 3a}, \qquad z = \frac{3t}{2t^3 - 3a},$$

forment une famille de courbes tracées sur P.

Notons enfin que l'équation (4) admet l'intégrale singulière $h = 0$, à laquelle correspond le plan $y = 0$. Ce plan est en effet tangent à l'origine au paraboloïde P, et l'origine est un point de la parabole : cette fois c'est l'intégrale singulière qui donne une solution impropre.

Problème 16.

Étant donnée une équation linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

on prend une nouvelle variable indépendante t liée à x par la relation $t = \varphi(x)$, et l'équation (1) est remplacée par une nouvelle équation linéaire

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + q_1(t)y = 0.$$

On demande de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients p et q de l'équation (1) pour qu'il soit possible de choisir la fonction φ de façon que l'équation (2) ait ses coefficients constants.

Application. — En supposant $p = \frac{2}{x}$, trouver l'expression générale de $q(x)$ et l'intégrale générale de l'équation (1) correspondante.

(*Paris, oct.* 1922, *épr. écr.: 2e quest.*)

On a successivement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2 + \frac{dy}{dt}\varphi'';$$

portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$\varphi'^2\frac{d^2y}{dt^2} + (p\varphi' + \varphi'')\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Pour que cette équation se réduise à la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0,$$

a et b désignant des constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$p\varphi' + \varphi'' = a\varphi'^2, \qquad q = b\varphi'^2.$$

Dérivons par rapport à x la seconde équation ; on aura

$$q' = 2b\varphi'\varphi'',$$

d'où, en éliminant φ' et φ'' entre les trois équations ainsi obtenues,

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{q}\left(p + \frac{q'}{2q}\right)^2 = C^{te}.$$

Telle est la relation que doivent vérifier p et q pour que l'équation (1) puisse être ramenée, par un changement de variables $t = \varphi(x)$, à une équation à coefficients constants.

Application. — Si l'on prend $p = \frac{2}{x}$, l'équation (3) peut s'écrire

$$\text{(4)} \qquad \frac{2}{x} + \frac{q'}{2q} = \pm\sqrt{\lambda q},$$

λ désignant une constante. Posons

$$\pm\sqrt{\lambda q} = \frac{\lambda}{u}, \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{\lambda}{u^2}, \qquad \frac{q'}{q} = -2\frac{u'}{u}.$$

L'équation (4) se transforme en une équation linéaire

$$2u - xu' = \lambda x,$$

qui s'intègre aisément et donne

$$u = \lambda x + \mu x^2.$$

On en tire

$$q = \frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2},$$

α et k désignant deux constantes arbitraires, et l'équation (1) s'écrit dans ce cas

$$\text{(5)} \qquad y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2}y = 0.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, nous sommes amenés à faire le changement de variables

$$t = \log\frac{x}{x+\alpha};$$

l'équation (5) prend alors la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

et s'intègre par le procédé classique.

Problème 17.

α étant un nombre réel positif :

1° Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + \alpha^3}$.

2° Lorsque α tend vers zéro, $I(\alpha)$ devient infinie. Calculer la partie principale de $I(\alpha)$ en prenant $\frac{1}{\alpha}$ comme infiniment grand principal. [Ce calcul peut se faire, soit en utilisant le résultat de 1°, soit directement et sans connaître l'expression explicite de $I(\alpha)$.]

3° Lorsque α tend vers zéro, l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + \alpha^3}}$ *devient infinie : montrer que, dans ces conditions, $J(\alpha) - \log \frac{1}{\alpha}$ a une limite finie [le signe log indique un logarithme népérien].*

(*Paris, oct.* 1922, *épr. prat.*)

1° Le calcul de $I(\alpha)$ se fait, suivant la méthode classique, par décomposition en éléments simples. On trouve ainsi

$$I(\alpha) = \frac{1}{3\alpha^2}\left[\log \frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} + \sqrt{3}\left(\text{arc tg}\,\frac{2-\alpha}{\alpha\sqrt{3}} + \text{arc tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right],$$

la détermination de l'arc tg étant prise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

2° Quand α tend vers zéro, la quantité entre crochets tend vers $\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$, la partie principale de $I(\alpha)$ est donc égale à $\frac{2\pi}{3\alpha^2\sqrt{3}}$.

On peut trouver directement cette partie principale en faisant dans I le changement de variable $x = \alpha t$, qui donne

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{t^3+1},$$

et en calculant ensuite l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1}$; le changement de variable

$$t^3 = \frac{u}{1-u}, \qquad \text{d'où} \qquad t^3 + 1 = \frac{1}{1-u}, \qquad 3t^2dt = \frac{du}{(1-u)^2},$$

$$dt = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{4}{3}}du,$$

donne [1]

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

on retrouve bien la partie principale $\frac{2\pi}{3\alpha^2\sqrt{3}}$.

---

[1] I, 102.

3° Posons dans l'intégrale $J(\alpha)$ $x = \alpha t$; on aura

$$J(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}}.$$

Posons maintenant $$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}} + \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}},$$

et faisons tendre α vers zéro. La première intégrale a une valeur constante, A, et la seconde croît indéfiniment. Or on peut écrire

$$J(\alpha) - \log \frac{1}{\alpha} = A + \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}} - \frac{1}{t} \right) dt,$$

et tout revient à démontrer que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

a une valeur finie. Or on a

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left[\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] = -\frac{1}{3t^4}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{t}\cdot$ L'élément différentiel étant infiniment petit d'ordre 4 par rapport à $\frac{1}{t}$, l'intégrale est bien finie [1].

Problème 18.

Étant donné un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, *à un point quelconque* M *de coordonnées* (x, y, z) *de l'espace, on fait correspondre le plan* P *représenté par l'équation*

$$x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x, y)}(Z - z) = 0,$$

X, Y, Z *désignant les coordonnées courantes, et* $\lambda(x, y)$ *étant une fonction des deux variables* x *et* y *indépendante de* z. *Soit* Γ *une courbe gauche telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points coïncide avec le plan* P *correspondant à ce point.*

1° *La fonction* $\lambda(x, y)$ *étant donnée, démontrer qu'il existe en général deux familles de courbes* Γ, *de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille et une seule par un point quelconque de l'espace. Former l'équation différentielle qui détermine les projections de ces courbes sur le plan* xOy.

2° *Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes* Γ, *et quelle est la nature de ces surfaces?*

---

(1) I, 40.

3° *Déterminer les fonctions* $\lambda(x, y)$ *pour lesquelles les deux familles de courbes* Γ *sont confondues.*

4° *Trouver l'expression générale des fonctions* $\lambda(x, y)$ *telles que les courbes* Γ *correspondantes se projettent sur le plan des* xy *suivant deux familles de courbes orthogonales. Inversement étant données dans le plan* xOy *deux familles de courbes orthogonales, sont-elles toujours les projections de deux familles de courbes* Γ *correspondant à une fonction* $\lambda(x, y)$*?*

Exemple. — *Déterminer la fonction* $\lambda(x, y)$ *de façon que les courbes* Γ *se projettent sur le plan* xOy *suivant les paraboles* $y^2 = 2Cx$ *(où* C *est une constante arbitraire) et leurs trajectoires orthogonales.*

(*Paris, juin* 1923, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° Il s'agit de déterminer y et z en fonction de x de telle sorte que la courbe Γ engendrée par le point (x, y, z) ait pour plan osculateur en chaque point le plan P

$$\text{(P)} \qquad x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x, y)}(Z - z) = 0.$$

Nous écrirons pour cela (1) que les équations obtenues en dérivant deux fois de suite par rapport à x l'équation (P), où y et z sont des fonctions inconnues de x, sont vérifiées pour $X = x$, $Y = y$, $Z = z$.

Une première dérivation donne

$$\text{(1)} \qquad X - x + y'(Y - y) + e^{\lambda}\lambda'(Z - z) - x - yy' - e^{\lambda}z' = 0$$

$$\left(y' = \frac{dy}{dx}, \qquad z' = \frac{dz}{dx}, \qquad \lambda' = \frac{\partial\lambda}{\partial x} + y'\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right);$$

on doit donc avoir

$$\text{(2)} \qquad x + yy' + e^{\lambda}z' = 0,$$

et l'équation (1) se réduit à

$$X - x + y'(Y - y) + e^{\lambda}\lambda'(Z - z) = 0.$$

Une seconde dérivation donne

$$y''(Y - y) + \frac{d}{dx}(e^{\lambda}\lambda')(Z - z) - 1 - y'^2 - z'\lambda'e^{\lambda} = 0,$$

d'où la nouvelle condition

$$\text{(3)} \qquad 1 + y'^2 + e^{\lambda}z'\lambda' = 0.$$

Les équations (2) et (3) déterminent $y(x)$ et $z(x)$, c'est-à-dire la courbe Γ.

Éliminons z' entre (2) et (3); nous obtiendrons l'équation

$$\text{(4)} \qquad y'^2(1 - y\lambda_y) - y'(x\lambda_y + y\lambda_x) + 1 - x\lambda_x = 0,$$

qui est l'équation différentielle des projections des courbes Γ sur le plan des xy : y étant connu, l'équation (2) donnera z par une quadrature.

Comme l'équation (4) est du second degré en y', on voit bien que les courbes Γ

(1) II, 109.

formeront en général deux familles telles que par tout point de l'espace il passe une courbe et une seule de chaque famille.

2° Le plan tangent à une surface a pour équation, avec les notations classiques,

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0.$$

Si les lignes asymptotiques de cette surface sont des courbes Γ, ses plans tangents, osculateurs aux asymptotiques (1), doivent être des plans P, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{p}{x}=\frac{q}{y}=-e^{-\lambda},$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-xe^{-\lambda}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-ye^{-\lambda}.$$

La condition de compatibilité de ces deux équations s'écrit

$$y\frac{\partial \lambda}{\partial x}-x\frac{\partial \lambda}{\partial y}=0\,;$$

c'est une équation aux dérivées partielles linéaire et du premier ordre, qui donne

$$\lambda=f(r) \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2}),$$

f désignant une fonction arbitraire. On aura alors, si cette condition est satisfaite,

$$dz=-(xdx+ydy)e^{-f(r)}=-re^{-f(r)}dr$$

et

$$z=\varphi(r),$$

ce qui montre que les surfaces cherchées sont de révolution autour de Oz.

3° Pour que les deux familles de courbes Γ soient confondues, il faut et il suffit que l'équation (4) ait une racine double en y', autrement dit que $\lambda(x, y)$ satisfasse à l'équation du premier ordre

(5) $$(x\lambda_y+y\lambda_x)^2-4(1-x\lambda_x)(1-y\lambda_y)=0.$$

Passons aux coordonnées polaires $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, et posons

$$\lambda(x, y)=\mu(r, \theta).$$

L'équation (5) devient $$\left(\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\right)^2+4r\frac{\partial\mu}{\partial r}-4=0.$$

Les variables se séparent, et l'on a immédiatement une intégrale complète en posant

$$r\frac{\partial\mu}{\partial r}=\cos^2\alpha, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\theta}=2\sin\alpha,$$

d'où

$$\mu=\cos^2\alpha \operatorname{Log} r+2\theta\sin\alpha+\beta.$$

On en déduit l'intégrale générale par le procédé classique.

4° Pour que les courbes intégrales de l'équation (4) forment deux familles orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$1-x\lambda_x+1-y\lambda_y=0,$$

(1) II, 125.

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \lambda = \operatorname{Log}(x^2+y^2)+f\left(\frac{y}{x}\right),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Inversement, soit

$$(7)\qquad y'^2+\rho(x, y)y'-1=0$$

une équation différentielle définissant un réseau orthogonal. L'équation (4), où l'on remplace λ par sa valeur (6), s'écrit

$$(8)\qquad y'^2+\frac{\dfrac{4xy}{x^2+y^2}+\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)f'}{\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}f'}y'-1=0.$$

Pour qu'on puisse identifier les équations (7) et (8), il faut et il suffit que $\rho(x, y)$ soit homogène et de degré zéro en x et y. Par exemple, si l'équation (7) admet comme intégrales les paraboles $y^2=2Cx$, on aura

$$\rho=\frac{4x^2-y^2}{2xy};$$

la fonction f sera alors déterminée par la condition

$$\frac{4xy}{x^2+y^2}+\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)f'=\frac{4x^2-y^2}{2xy}\left(\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+\frac{y}{x}f'\right),$$

d'où l'on tire, en posant $y=tx$,

$$f(t)=\operatorname{Log}k\frac{t^2\sqrt{t^2+2}}{t^2+1}\qquad \text{et}\qquad \lambda(x, y)=\operatorname{Log}k\frac{y^2\sqrt{2x^2+y^2}}{x}$$

Problème 19.

Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *deux fonctions rationnelles des variables* (x, y) *satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si dans $P(x, y)$ *on donne à* y *une valeur constante* y_0, *on obtient une fonction rationnelle* $\varphi(x)=P(x, y_0)$ *de la seule variable* x. *Démontrer, en s'appuyant sur les théorèmes classiques de Cauchy, que les résidus de cette fonction rationnelle* $\varphi(x)$ *sont indépendants de* y_0. *Quelle serait la proposition réciproque?*

Application.

Soit $P(x, y)$ *la fonction rationnelle*

$$P(x, y)=\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F}{x^2-2xy+1}.$$

On demande comment il faut prendre les coefficients constants A, B, C, D, E, F *pour qu'il existe une autre fonction rationnelle* $Q(x, y)$ *telle que* $P\,dx+Q\,dy$ *soit une différentielle exacte.* (*Paris, juin* 1923, *épr. écr.: 2e quest.*)

La fonction $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe qui n'a que des singularités polaires isolées[1]. Soit z un pôle de $\varphi(x)$; on peut l'entourer d'un petit cercle γ de centre z ne contenant pas d'autres pôles, et le résidu de $\varphi(x)$ en ce point sera donné par la formule classique

$$\rho = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{P}(x, y_0)dx.$$

On en tire
$$\frac{d\rho}{dy_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y_0}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial \mathrm{Q}(x, y_0)}{\partial x}dx,$$

et cette dernière intégrale, qui est égale à la variation de $\mathrm{Q}(x, y)$ le long de γ, est nulle puisque par hypothèse $\mathrm{Q}(x, y)$ est une fonction rationnelle, donc uniforme. Le résidu est donc bien indépendant de y_0.

Réciproquement supposons que les résidus de la fraction rationnelle $\mathrm{P}(x, y)$ relatifs aux pôles du plan (x) correspondant à une valeur donnée de y soient indépendants de y, et soit $\mathrm{Q}(x, y)$ une fonction telle que

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

Il résulte du raisonnement précédent que $\frac{\partial \mathrm{Q}}{dx}$, qui est une fonction méromorphe, a tous ses résidus nuls pour les pôles relatifs à la variable x : $\mathrm{Q}(x, y)$ est donc une fraction rationnelle, puisqu'elle provient d'une fraction rationnelle par une intégration qui n'introduit aucun terme logarithmique.

Prenons
$$\mathrm{P}(x, y) = \frac{\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F}}{x^2 - 2xy + 1};$$

pour qu'il existe une fraction rationnelle $\mathrm{Q}(x, y)$ telle que $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ soit une différentielle exacte, il faut que les résidus de P soient indépendants de y. Or les pôles de P sont

$$x_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}, \qquad x_2 = y - \sqrt{y^2 - 1};$$

supposons $y^2 \neq 1$, et calculons le résidu relatif à x_1 ; on trouve[2]

$$\rho = \frac{\mathrm{A}(2y^2 - 1 + 2y\sqrt{y^2 - 1}) + 2\mathrm{B}(y^2 + y\sqrt{y^2 - 1}) + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}(y + \sqrt{y^2 - 1}) + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F}}{2\sqrt{y^2 - 1}},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\rho = \frac{y^2(2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + \mathrm{C}) + 2(\mathrm{D} + \mathrm{E})y + \mathrm{F} - \mathrm{A}}{2\sqrt{y^2 - 1}} + (\mathrm{A} + \mathrm{B})y + \mathrm{D}.$$

Pour que ρ soit indépendant de y, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{D} + \mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{F} - \mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0,$$

---

(1) I, 189.
(2) I, 190.

d'où
$$P = A + \frac{2D(x-y)}{x^2 - 2xy + 1},$$

A et D désignant des constantes arbitraires.

On peut se borner évidemment à la solution $P = \frac{x-y}{x^2-2xy+1}$; on trouve alors

$$Q = \frac{-x}{x^2 - 2xy + 1} \qquad \text{et} \qquad P\,dx + Q\,dy = d \operatorname{Log} \sqrt{x^2 - 2xy + 1}.$$

Problème 20.

1° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + z, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}.$$

En particulier donner les expressions des inconnues x, y, z en fonction de t et des valeurs x_0, y_0, z_0 de ces inconnues pour $t = 0$.

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\text{(E)} \qquad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$$

où p et q sont les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la fonction inconnue $z(x, y)$. Déterminer en particulier la surface intégrale de l'équation (E) qui contient l'axe Ox, c'est-à-dire pour laquelle $z(x, 0) \equiv 0$; donner l'équation cartésienne de cette surface intégrale.

3° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$-\frac{3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $f(x, y, z)$ est la fonction inconnue à déterminer.

(*Paris, juin* 1923, *épr. prat.*)

1° La méthode classique d'intégration du système (S) consiste à chercher des solutions de la forme

$$x = Ae^{\alpha t}, \qquad y = Be^{\alpha t}, \qquad z = Ce^{\alpha t}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (S), on est conduit après suppression du facteur $e^{\alpha t}$, au système

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} A(2\alpha + 3) - 4B + C = 0, \\ A + B\alpha - C = 0, \\ -3A + 12B + C(2\alpha - 9) = 0. \end{cases}$$

Pour que ces équations homogènes et linéaires par rapport aux inconnues A,

B, C admettent des solutions non toutes nulles, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\alpha+3 & -4 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -3 & 12 & 2\alpha-9 \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro, ce qui donne, pour déterminer α, l'équation

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha = 0,$$

qui admet pour racines

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = 2.$$

Si l'on prend $\alpha = 0$, les équations (1) donnent

$$A = B = C,$$

d'où une première solution du système (S) :

$$x_1 = a, \qquad y_1 = a, \qquad z_1 = a.$$

Pour $\alpha = 1$, on a de même la solution

$$x_2 = be^t, \qquad y_2 = 2be^t, \qquad z_2 = 3be^t,$$

et pour $\alpha = 2$ la solution

$$x_3 = ce^{2t}, \qquad y_3 = 4ce^{2t}, \qquad z_3 = 9ce^{2t}.$$

L'intégrale générale s'écrit donc

$$(2) \qquad x = a + be^t + ce^{2t}, \qquad y = a + 2be^t + 4ce^{2t}, \qquad z = a + 3be^t + 9ce^{2t}.$$

On détermine aisément les constantes arbitraires a, b, c de telle sorte que, pour $t = 0$, x, y et z prennent les valeurs x_0, y_0, z_0, on obtient alors les expressions

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3x_0 - 3y_0 + z_0 - \dfrac{5x_0 - 8y_0 + 3z_0}{2} e^t + \dfrac{x_0 - 2y_0 + z_0}{2} e^{2t}, \\ y = 3x_0 - 3y_0 + z_0 - (5x_0 - 8y_0 + 3z_0)e^t + 2(x_0 - 2y_0 + z_0)e^{2t}, \\ z = 3x_0 - 3y_0 + z_0 - \dfrac{3}{2}(5x_0 - 8y_0 + 3z_0)e^t + \dfrac{9}{2}(x_0 - 2y_0 + z_0)e^{2t}. \end{cases}$$

2° Le système caractéristique de l'équation (E) est identique au système (S) moyennant l'introduction d'une variable auxiliaire t. Les équations (2), où l'on considère a, b, c comme des constantes et t comme un paramètre variable, représentent les courbes caractéristiques de l'équation (E) : cette équation est donc intégrée.

Pour obtenir une surface intégrale passant par une courbe donnée Γ

$$x = \alpha(v), \qquad y = \beta(v), \qquad z = \gamma(v),$$

il suffira(1) de remplacer dans les équations (3) x_0 y_0 et z_0 par α, β, γ ; en faisant varier v on obtiendra toutes les courbes caractéristiques qui coupent Γ. Les équations (3) représenteront alors la surface intégrale cherchée, rapportée aux coordonnées curvilignes t et v.

(1) II, 268.

Supposons par exemple que la courbe Γ soit l'axe Ox ; on posera

$$x_0 = v, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$

et les équations (3) s'écriront

$$(4) \qquad x = v\left(3 - \frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right), \qquad y = v(3 - 5e^t + 2e^{2t}),$$
$$z = v\left(3 - \frac{15}{2}e^t + \frac{9}{2}e^{2t}\right).$$

La surface représentée par ces équations est un cône de sommet O, passant par la courbe caractéristique

$$\xi = 3 - \frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}, \qquad \eta = 3 - 5e^t + 2e^{2t}, \qquad \zeta = 3 - \frac{15}{2}e^t + \frac{9}{2}e^{2t};$$

cette courbe, comme nous le verrons tout à l'heure, étant une parabole, on aura un cône du second degré. Pour obtenir son équation en coordonnées cartésiennes, on élimine d'abord v entre les équations (4), ce qui donne les équations

$$2x(3 - 5e^t + 2e^{2t}) - y(6 - 5e^t + e^{2t}) = x(6 - 15e^t + 9e^{2t}) - z(6 - 5e^t + e^{2t}) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$e^{2t}(4x - y) - 5e^t(2x - y) + 6(x - y) = 0,$$
$$e^{2t}(9x - z) - 5e^t(3x - z) + 6(x - z) = 0;$$

on en tire $\qquad e^t = \dfrac{3(5x - 8y + 3z)}{5(3x - 3y + z)}, \qquad e^{2t} = \dfrac{3(x - 2y + z)}{3x - 3y + z},$

et finalement

$$25(x - 2y + z)(3x - 3y + z) - 3(5x - 8y + 3z)^2 = 0;$$

c'est bien l'équation d'un cône du second degré, de sommet O, passant par Ox.

Revenons aux courbes définies par les équations (2); elles forment, avons-nous dit, la congruence des courbes caractéristiques de l'équation (E). Il est facile de voir qu'elles ne dépendent effectivement que de deux paramètres. Faisons d'abord en effet $e^t = u$; les équations (2) s'écriront

$$(5) \qquad x = a + bu + cu^2, \qquad y = a + 2bu + 4cu^2, \qquad z = a + 3bu + 9cu^2,$$

et l'un au moins des coefficients b et c doit être supposé différent de zéro. Supposons $b = 0$, et posons $cu^2 = \rho$, on obtient les droites

$$(D_1) \qquad x = a + \rho, \qquad y = a + 4\rho, \qquad z = a + 9\rho,$$

qui sont toutes situées dans le plan

$$(\Pi_1) \qquad 5x - 8y + 3z = 0.$$

Supposons en second lieu $c = 0$, et posons $bu = \rho$; on obtient les droites

$$(D_2) \qquad x = a + \rho, \qquad y = a + 2\rho, \qquad z = a + 3\rho,$$

qui sont toutes situées dans le plan

$$(\Pi_2) \qquad x - 2y + z = 0.$$

Les droites D_1 sont parallèles à une direction de coefficients directeurs 1, 4, 9,

et les droites D_2 parallèles à une direction de coefficients directeurs 1, 2, 3; les plans Π_1 et Π_2 se coupent suivant la droite

(D) $$x = y = z.$$

Si b et c sont différents de zéro, on pourra poser $bu = \rho$, et écrire les équations (5) sous la forme

(6) $$x = a + \rho + m\rho^2, \qquad y = a + 2\rho + 4m\rho^2, \qquad z = a + 3\rho + 9m\rho^2;$$

ainsi en dehors des deux familles à un paramètre de droites parallèles situées dans les plans Π_1 et Π_2, les courbes caractéristiques sont définies par les équations (6) où figurent seulement deux constantes arbitraires, a et m.

Ce sont des courbes du second degré, ayant un seul point à l'infini dans la direction des droites D_1, donc des paraboles. Il est facile de voir qu'elles sont tangentes au plan Π_2, les points de contact étant situés sur la droite D, qui n'est d'ailleurs pas tangente aux paraboles. Enfin elles sont situées dans des plans parallèles d'équation

$$3x - 3y + z - a = 0.$$

On retrouve d'ailleurs les droites D_1 en considérant les paraboles aplaties suivant leur axe, et les droites D_2 en considérant les paraboles dont le paramètre est infini.

Il est intéressant de signaler le rôle singulier de la droite D relativement aux surfaces intégrales de (E). Mettons d'abord à part les plans des paraboles caractéristiques, le plan Π_1 et le plan Π_2, qui sont les seules surfaces intégrales planes. Toutes les caractéristiques coupent D, donc D appartient à toutes les surfaces intégrales. Le plan Π_2 qui contient D et est tangent à toutes les caractéristiques est d'ailleurs tangent à toute surface intégrale tout le long de D. Donc toutes les surfaces intégrales autres que les plans sont tangentes à Π_2 tout le long de D.

3° Si l'on élimine ρ entre les équations (6), on a en termes finis les équations de la congruence caractéristique sous la forme

$$3x - 3y + z = C^{te}, \qquad \frac{(5x - 8y + 3z)^2}{x - 2y + z} = C^{te}.$$

La fonction $f(x, y, z)$ cherchée a donc pour expression générale

$$F\left[3x - 3y + z, \frac{(5x - 8y + 3z)^2}{x - 2y + z}\right].$$

Problème 21.

1° *Étant donnés un système d'axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz *et une surface* S *représentée par une équation* $z = F(u)$ *où* u *est égal au produit* xy, *démontrer que l'équation différentielle qui détermine les projections des lignes asymptotiques de cette surface sur le plan des* xy *peut être ramenée à une forme intégrable par un changement de variables. (On pourra s'appuyer sur ce que l'équation de la surface ne change pas quand on change* x *en* Cx, y *en* $\frac{y}{C}$, *quelle que soit la constante* C.)

2° *Achever l'intégration de l'équation différentielle dans le cas où la surface* S *a pour équation* $z = \text{Log}|1 - xy|$ *et démontrer que les coordonnées* (x, y) *d'un point d'une courbe intégrale peuvent s'exprimer par des fonctions entières d'un paramètre.*

3° *Étudier la forme générale de ces courbes intégrales dans le voisinage de la courbe* (D) *qui sépare les points du plan par lesquels il passe deux courbes intégrales réelles des points du plan par lesquels il n'en passe aucune de réelle.*

(*Paris, oct.* 1923, *épr. écr. : 1*re *quest.*)

1° On a successivement, avec les notations classiques,

$$p = y\text{F}', \qquad q = x\text{F}', \qquad r = y^2\text{F}'', \qquad s = xy\text{F}'' + \text{F}', \qquad t = x^2\text{F}'',$$

et l'équation aux asymptotiques s'écrit

$$(ydx + xdy)^2\text{F}'' + 2\text{F}'dxdy = 0, \tag{1}$$

ou encore

$$\text{F}''du^2 + 2\text{F}'dxdy = 0.$$

Faisons, dans cette équation, le changement de variables $y = \frac{u}{x}$; on pourra écrire l'équation transformée

$$\frac{\text{F}''}{\text{F}'}du^2 + 2du\frac{dx}{x} - 2u\frac{dx^2}{x^2} = 0, \tag{2}$$

et il suffira de résoudre par rapport à $\frac{dx}{x}$ pour séparer les variables. L'intégration se ramène donc à une quadrature.

La théorie des groupes [1] permettait de prévoir ce résultat. L'équation (1) admet en effet le groupe de transformations à un paramètre

$$x = \text{C}x_1, \qquad y = \frac{y_1}{\text{C}},$$

auquel correspond la transformation infinitésimale $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$; si donc on met l'équation (1) sous la forme $\text{B}dx - \text{A}dy$, on aura immédiatement le facteur intégrant $\frac{1}{\text{B}x + \text{A}y}$. C'est ce qu'il est aisé de vérifier; l'équation (1) s'écrit en effet

$$\left(\varepsilon\sqrt{\text{F}'^2 + 2u\text{F}'\text{F}''} - u\text{F}'' - \text{F}'\right)dx - x^2\text{F}''dy = 0, \tag{1'}$$

et l'on a $\quad x\left(\varepsilon\sqrt{\text{F}'^2 + 2u\text{F}'\text{F}''} - u\text{F}'' - \text{F}'\right) + x^2y\text{F}'' = x\left(\varepsilon\sqrt{} - \text{F}'\right)$;

divisant le premier membre de l'équation (1') par $x\left(\varepsilon\sqrt{} - \text{F}'\right)$, on aura

$$\frac{dx}{x} - \frac{\text{F}''(udx + x^2dy)}{x\left(\varepsilon\sqrt{} - \text{F}'\right)} = \frac{dx}{x} - \frac{\text{F}''du}{\varepsilon\sqrt{\text{F}'^2 + 2u\text{F}'\text{F}''} - \text{F}'} = 0,$$

et le premier membre est bien une différentielle totale exacte.

---

(1) II, 195.

2° Si l'on prend $F = \text{Log}(1 - u)$, l'équation (2) devient

$$2u\frac{dx^2}{x^2} - 2du\frac{dx}{x} - \frac{du^2}{1-u} = 0,$$

et l'on en tire
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{2u}\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right).$$

Posons
$$u = \cos 2\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \text{cotg}\,\theta\,;$$

nous aurons
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{2\cos 2\theta}\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta - \cos\theta},$$

d'où

$$\text{Log}\,x = \int\frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \int\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}d\theta + \int\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}d\theta$$
$$= \text{Log}(\sin\theta - \cos\theta) - \theta + \text{Log}\,a,$$

$$x = ae^{-\theta}(\sin\theta - \cos\theta), \qquad y = -\frac{1}{a}e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta);$$

x et y sont bien des fonctions entières de θ.

3° Revenons à l'équation (1) où nous remplacerons F par $\text{Log}(1 - xy)$; elle s'écrit

(3)
$$x^2y'^2 + 2y' + y^2 = 0,$$

d'où l'on tire
$$y' = \frac{-1 + \varepsilon\sqrt{1 - x^2y^2}}{x^2}.$$

La courbe séparatrice des régions à courbes intégrales réelles et des régions à courbes intégrales imaginaires se décompose donc en deux hyperboles équilatères conjuguées

$$(H_1) \qquad xy - 1 = 0, \qquad\qquad (H_2) \qquad xy + 1 = 0.$$

On voit immédiatement que (H_1) est une courbe intégrale : c'est l'intégrale singulière, enveloppe des courbes intégrales. Au contraire (H_2) n'est pas une courbe intégrale : c'est un lieu de points de rebroussement ; donc toute courbe intégrale présente, au point où elle rencontre (H_2), un rebroussement.

Cherchons, en appliquant la méthode classique [1], le développement de y en fonction de x sur une courbe intégrale, au voisinage du point (x_0, y_0) où cette courbe rencontre (H_2). Posant

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0,$$

on met d'abord l'équation (3) sous la forme

(4)
$$Y' = -\frac{1}{(X + x_0)^2} \pm \sqrt{\frac{1 - (X + x_0)^2(Y + y_0)^2}{(X + x_0)^4}},$$

et l'équation de (H_2) s'écrit

$$Y_1 = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{X + x_0}.$$

---

[1] II, 21-23.

Posons ensuite $Y = Y_1 + u^2$; nous aurons à la place de l'équation (4) l'équation

$$2u\frac{du}{dX} = -\frac{2}{(X+x_0)^2} + u\sqrt{\frac{2}{(X+x_0)^3} - \frac{u^2}{(X+x_0)^4}} = -\frac{2}{(X+x_0)^2} + u\theta(X,\ u).$$

La fonction $\theta(X,\ u)$ est holomorphe au voisinage de $X=0,\ u=0$, et l'on a

$$\theta(X,\ u) = \sqrt{2}\,x_0^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{X}{x_0} + \cdots\right),$$

les termes non écrits étant au moins du 3[e] degré. On en tire

$$(5) \qquad \frac{dX}{du} = \frac{2ux_0^3}{-2x_0 + 4X + \sqrt{2}\,x_0^{\frac{3}{2}}u + \cdots}.$$

Cette équation différentielle admet une intégrale et une seule $X(u)$ s'annulant ainsi que sa dérivée première pour $u=0$ et holomorphe au voisinage de ce point; son développement est donc de la forme

$$(6) \qquad X = \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \cdots;$$

substituant dans l'équation (5) et identifiant on trouve

$$\alpha_2 = -\frac{x_0^2}{2}, \qquad \alpha_3 = -\frac{\sqrt{2}\,x_0^{\frac{5}{2}}}{6}.$$

On tire alors de (6) par inversion[1]

$$u = \beta X^{\frac{1}{2}} + \gamma X + \cdots;$$

substituant dans (6) et identifiant on trouve

$$\beta^2 = -\frac{2}{x_0^2}, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}x_0^{-\frac{3}{2}},$$

d'où

$$u^2 = -\frac{2X}{x_0^2} + \frac{4i}{3x_0}\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

et finalement

$$Y = Y_1 + u^2 = -\frac{X}{x_0^2} + \frac{4i}{3x_0}\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

La courbe intégrale présente bien un point de rebroussement pour $X=0,\ Y=0$, c'est-à-dire sur (II_2), et l'on voit de plus qu'au voisinage de ce point X et x_0 sont de signes contraires.

Problème 22.

Soient

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p(x)y, \qquad (2) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q(x)z,$$

deux équations différentielles linéaires du second ordre. On demande à quelle condition doivent satisfaire les fonctions p et q pour qu'il existe une intégrale

(1) II, 11.

particulière y_1 de l'équation (1) et une intégrale particulière z_1 de l'équation (2), dont le produit $y_1 z_1$ soit égal à l'unité.

Peut-il exister plusieurs systèmes distincts *d'intégrales jouissant de cette propriété?*

Déduire du résultat obtenu que l'intégration de l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 2u(2p-q)^2$$

se ramène à l'intégration de l'équation (1).

(*Paris, oct.* 1923, *épr. écr.: 2e quest.*)

Des équations (1) et (2) on tire, compte tenu de la relation $yz = 1$,

$$zy'' + yz'' = (p+q)yz = p+q\,;$$

la même relation donne d'autre part

$$zy' + yz' = 0, \qquad zy'' + yz'' + 2y'z' = 0,$$

d'où l'on tire

$$2y'z' = -(p+q), \qquad z^2y' + z' = 0, \qquad \frac{z'}{z} = -\frac{y'}{y} = \varepsilon\sqrt{\frac{p+q}{2}}.$$

S'il existe deux intégrales y et z satisfaisant à la relation $yz = 1$, elles sont donc nécessairement de la forme

$$y_1 = e^{-\varepsilon\int\sqrt{\frac{p+q}{2}}dx}, \qquad z_1 = e^{\varepsilon\int\sqrt{\frac{p+q}{2}}dx}.$$

Écrivons que z_1, par exemple, est une intégrale de (2); on a successivement

$$\frac{z_1'}{z_1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{p+q}, \qquad \frac{z_1''}{z_1} - \frac{z_1'^2}{z_1^2} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\frac{p'+q'}{\sqrt{p+q}} = q - \frac{p+q}{2} = \frac{q-p}{2},$$

ce qui donne la condition cherchée

$$(3) \qquad p' + q' = \varepsilon(q-p)\sqrt{2(p+q)}.$$

On serait conduit à la même condition en exprimant que y_1 est une intégrale de (1). La relation (3) est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un couple d'intégrales du système (1)-(2) ayant pour produit l'unité.

Soit (y_1, z_1) un tel couple; $\left(\lambda y_1, \frac{z_1}{\lambda}\right)$ constitue une autre solution, que l'on ne peut évidemment considérer comme distincte de la première. D'ailleurs p et q étant donnés, ε est bien déterminé par la relation (3). Le problème ne peut donc admettre qu'une solution.

La dernière question ne semble pas présenter de sens bien précis, l'équation différentielle en u s'intégrant immédiatement par une quadrature.

Problème 23.

Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{Log} x}{(1+x^4)^3} dx.$$

(*Paris, oct.* 1923, *épr. prat.*)

Soit I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $x^4 = u$ donne

$$16\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u du}{(1+u)^3} = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log} u du}{(1+u)^3} + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u du}{(1+u)^3}.$$

Faisons dans la dernière intégrale le changement de variable $u = \frac{1}{v}$; nous aurons

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u du}{(1+u)^3} = -\int_0^1 \frac{v \operatorname{Log} v dv}{(1+v)^3},$$

et par suite

$$16\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{(1-u) \operatorname{Log} u du}{(1+u)^3} = \int_0^1 \operatorname{Log} u d\frac{u}{(1+u)^2} = \left|\frac{u \operatorname{Log} u}{(1+u)^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{(1+u)^2}.$$

Mais $\lim\limits_{u=0} u \operatorname{Log} u = 0$; il reste donc

$$16\mathrm{I} = \left|\frac{1}{1+u}\right|_0^1 = -\frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{I} = -\frac{1}{32}.$$

Problème 24.

1° *Etant donnée l'expression*

(1) $$\mathrm{P}(x, y, z)dx + \mathrm{Q}(x, y, z)dy + \mathrm{R}(x y, z)dz$$

où P, Q, R *sont trois fonctions connues de* x, y, z, *démontrer qu'il existe une infinité de fonctions* $f(x, y)$ *des deux variables* x *et* y *telles que, si l'on remplace dans l'équation* (1) z *par* $f(x, y)$ *et* dz *par* df, *on obtient une différentielle exacte. Expliquer comment on peut arriver à la condition à laquelle doit satisfaire la fonction* $f(x, y)$ *en appliquant la formule de Stokes à une courbe fermée située sur la surface* S *représentée par l'équation* $z = f(x, y)$.

2° *Si* $f(x, y) = \mathrm{C}$ *est une solution du problème quelle que soit la constante* C, *toutes les autres solutions s'obtiennent par une quadrature.*

3° *Lorsque l'équation*

(2) $$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = 0$$

est complètement intégrable, toutes les surfaces S *se déterminent sans aucune intégration quand on connaît l'intégrale générale* $\mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{C^{te}}$ *de l'équation* (2).

4° *Déterminer les surfaces* S *dans le cas particulier où l'on a*

$$P = 2x(y^2 - z^2) - 6xyz, \qquad Q = 2yz^2 + 3z(y^2 - x^2), \qquad R = 0,$$

et prouver que ces surfaces S *sont engendrées par des courbes* Γ *qui coupent orthogonalement une famille de surfaces* Σ *dont on demande l'équation (les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires). Indiquer une représentation paramétrique des courbes* Γ. (*Paris, juin* 1924, *épr. écr. :* 1re *quest.*)

1° L'expression (1) où l'on remplace dz par $pdx + qdy$ s'écrit

$$(P + Rp)dx + (Q + Rq)dy.$$

Pour qu'elle soit une différentielle totale exacte, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial y}(P + Rp) = \frac{\partial}{\partial x}(Q + Rq);$$

bien entendu on effectue les dérivations en considérant z, p et q comme des fonctions inconnues de x et y, assujetties simplement aux relations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

On obtient ainsi la condition à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue $z = f(x, y)$ sous forme d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre, qui s'écrit

$$(3) \qquad p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On peut obtenir autrement cette condition. Considérons en effet, sur la surface S définie par l'équation $z = f(x, y)$, une courbe fermée quelconque C ; le long de cette courbe l'expression (1) est une différentielle totale exacte, et l'on a par suite

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

ou encore en désignant par σ la portion de S intérieure à C, par $d\sigma$ l'élément d'aire entourant le point de σ où les cosinus directeurs de la normale à S sont α, β, γ, et enfin en appliquant la formule de Stokes,

$$\iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\gamma\right]d\sigma = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit, compte tenu des relations

$$\alpha = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \beta = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \gamma = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\iint_\sigma \left[p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\frac{d\sigma}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0;$$

ceci ne peut avoir lieu quelle que soit la portion σ de S que si l'élément différentiel est nul, ce qui donne la condition (3).

2° Pour que $z = C^{te}$ soit une intégrale de l'équation (3), il faut et il suffit que le second membre de cette équation soit nul quand on remplace, dans P et Q, z par une constante arbitraire, c'est-à-dire que l'on ait *identiquement*

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z) \equiv 0.$$

L'intégration de l'équation (3) est alors équivalente à celle du système

$$\frac{dx}{R_y - Q_z} = \frac{dy}{P_z - R_x} = \frac{dz}{0};$$

la première équation s'écrit

$$(5) \qquad (P_z - R_x)dx + (Q_z - R_y)dy = 0,$$

et l'on peut y considérer z comme une constante : la relation (4) exprime précisément que le premier membre de (5) est une différentielle totale exacte, donc elle s'intègre par quadratures, et l'on a ainsi toutes les intégrales de (3).

3° On a par hypothèse

$$P = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Q = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad R = \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

λ désignant une fonction bien déterminée de x, y, z. Le système différentiel définissant la congruence caractéristique de l'équation (3) s'écrit alors

$$\frac{dx}{\lambda_y F_z - \lambda_z F_y} = \frac{dy}{\lambda_z F_x - \lambda_x F_z} = \frac{dz}{\lambda_x F_y - \lambda_y F_x},$$

et il admet les combinaisons intégrables

$$\lambda_x dx + \lambda_y dy + \lambda_z dz = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = C^{te},$$
$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \qquad \text{d'où} \qquad F = C^{te},$$

l'intégrale générale de l'équation (3) s'écrit donc

$$\theta(F, \lambda) = 0,$$

θ désignant une fonction arbitraire.

4° Avec les valeurs données de P, Q, R, l'équation (3) s'écrit

$$(6) \qquad (4yz + 3y^2 - 3x^2)p + (4xz + 6xy)q = 4xy.$$

Considérons d'une façon générale une équation linéaire

$$A(x, y, z)p + B(x, y, z)q = C(x, y, z),$$

et cherchons à quelle condition les caractéristiques de cette équation couperont à angle droit une famille de surfaces Σ. Par tout point (x, y, z) de l'espace, il passe une caractéristique c dont la tangente en ce point a pour coefficients directeurs A, B, C ; cette tangente devant être normale à Σ, on devra avoir en tout point de Σ

$$A dx + B dy + C dz = 0,$$

et réciproquement si cette relation est vérifiée c et Σ se coupent orthogonalement.

La condition cherchée est donc que cette dernière équation soit complètement intégrable.

Appliquons ce résultat à l'équation (6); il faudra prouver que l'équation

$$(7) \qquad (4yz + 3y^2 - 3x^2)dx + (4xz + 6xy)dy + 4xydz = 0$$

est complètement intégrable : il suffit pour s'en assurer de vérifier une identité classique. Mais cette vérification ne nous sera d'aucune utilité pour l'intégration de (7), et il est plus simple de chercher à effectuer cette intégration : si nous y réussissons la vérification deviendra sans objet [1]. Or l'intégration de (7) est équivalente à celle du système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3y^2 - 4yz}{4xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2z + 3y}{2y},$$

dont la seconde équation s'intègre aisément et donne

$$z = \frac{1}{y} f(x) - \frac{3}{4} y\,;$$

portons cette valeur dans la première : il reste pour déterminer la fonction inconnue $f(x)$ l'équation

$$4xf' + 4f - 3x^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4xf - x^3 = 4a.$$

L'équation (7) est donc bien complètement intégrable, et son intégrale générale s'écrit

$$4xyz + 3xy^2 - x^3 = C^{te}.$$

Revenons à l'équation (6); son système caractéristique, qui définit les courbes Γ, s'écrit

$$(8) \qquad \frac{dx}{4yz + 3y^2 - 3x^2} = \frac{dy}{4xz + 6xy} = \frac{dz}{4xy}.$$

La dernière équation, qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2z + 3y}{2y},$$

est une équation homogène en y et z, dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$(2z - y)^4(z + 2y) = a^5,$$

a désignant la constante d'intégration. Posons, en appelant v une variable auxiliaire,

$$2z - y = \frac{a}{v}, \qquad z + 2y = av^4\,;$$

nous aurons $$y = \frac{a}{5}\left(2v^4 - \frac{1}{v}\right), \qquad z = \frac{a}{5}\left(v^4 + \frac{2}{v}\right).$$

Si nous posons en outre $x^2 = u$ le système (8) se réduira à l'équation

$$\frac{du}{\frac{a^2}{5}\left(4v^8 - \frac{1}{v^2}\right) - 3u} = \frac{dv}{v}, \qquad \text{ou} \qquad v\frac{du}{dv} + 3u = \frac{a^2}{5}\left(4v^8 - \frac{1}{v^2}\right);$$

---

[1] C'est une généralisation de la remarque de I, 94.

c'est une équation linéaire par rapport à la fonction $u(v)$, qui a pour intégrale générale

$$u = x^2 = \frac{a^2}{5}\left(\frac{4}{11}v^8 - \frac{1}{v^2} + \frac{b}{v^3}\right).$$

On a ainsi l'expression des coordonnées d'un point (x, y, z) d'une courbe Γ au moyen du paramètre v et de deux constantes arbitraires a et b.

Problème 25.

1° *Calculer l'intégrale*

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+\alpha^2)^2}\, dx$$

par la méthode des résidus. Dans l'intervalle d'intégration $\log x$ *est le logarithme népérien réel de* x, *et* $\sqrt{x}$ *est pris positif;* α *est un paramètre positif.*

2° *Lorsque* α *tend vers zéro, l'intégrale* $\mathrm{I}(\alpha)$ *devient infinie. Montrer qu'elle est équivalente à une expression de la forme*

$$\mathrm{A}\alpha^p \log \alpha,$$

A *et* p *étant des constantes réelles qu'on peut déterminer directement sans calculer* $\mathrm{I}(\alpha)$.

(Paris, juin 1924, épr. prat.)

1° Posons $x = \alpha t^{\frac{1}{2}}$, t désignant une variable positive; il vient

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I} = \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{7}{2}} \int_0^{\infty} \frac{(\log \alpha + \frac{1}{2}\log t)t^{-\frac{3}{4}}\, dt}{(1+t)^2},$$

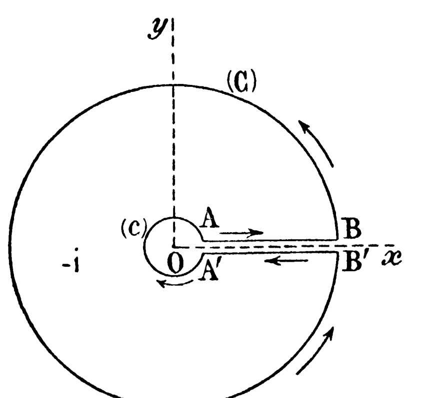
et nous sommes ramenés au calcul des deux intégrales

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{(1+t)^2} dt, \qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}\log t}{(1+t)^2} dt.$$

L'intégrale I_1 se ramène aisément à une intégrale eulérienne au moyen du changement de variable $t = \frac{u}{1-u}$, qui donne

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{\frac{3}{4}} du = \mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}.$$



Pour calculer I_2, considérons la fonction $\frac{z^{-\frac{3}{4}}\operatorname{Log} z}{(1+z)^2}$ à l'intérieur de l'aire comprise entre un lacet entourant l'origine et une circonférence de centre O et de rayon très grand R, ces deux contours étant réunis par une coupure effectuée le long de l'axe réel.

Choisissons pour l'argument de z une valeur comprise entre zéro et 2π, et pour la détermination de Log z celle qui se réduit à la valeur réelle $\log x$ en tout point de la coupure. Notre fonction est alors uniforme dans le domaine considéré, où elle n'admet d'autre singularité que le pôle double $z = -1$. Soit $f(z)$ cette fonction; il est clair que $|zf(z)|$ tend vers zéro quand $|z|$ tend vers zéro ou croît indéfiniment.

Soit ρ le résidu relatif au pôle $z = -1$. On aura

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{C} + \int_{B'A'} + \int_{c} = 2\pi i\rho. \tag{2}$$

En B l'argument de z est nul; en B' il est devenu égal à 2π. Donc quand on passe de B à B' en décrivant le contour (C), on remplace

$$z^{-\frac{3}{4}} \quad \text{par} \quad z^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}2\pi i} \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} z \quad \text{par} \quad \operatorname{Log} z + 2\pi i.$$

Par suite si l'on fait tendre vers zéro le rayon de (c) et croître indéfiniment celui de (C), la formule (2) donne à la limite

$$I_2 + \int_{\infty}^{0} \frac{t^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3\pi i}{2}} (\operatorname{Log} t + 2\pi i)}{(1+t)^2} dt = 2\pi i\rho,$$

ou encore, puisque $e^{-\frac{3\pi i}{2}} = i$,

$$I_2(1 - i) + 2\pi I_1 = 2\pi i\rho. \tag{3}$$

Posons $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(1+z)^2}$; le résidu au point $z = -1$ est égal à $\varphi'(-1)$; or on a

$$\varphi'(z) = -\frac{3}{4} z^{-\frac{7}{4}} \operatorname{Log} z + z^{-\frac{7}{4}} = z^{-\frac{7}{4}}\left(1 - \frac{3}{4}\operatorname{Log} z\right),$$

et comme au point $z = -1$ l'argument de z est égal à π, on aura en ce point

$$z^{-\frac{7}{4}} = e^{-\frac{7\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \qquad \operatorname{Log} z = \pi i,$$

et par suite
$$\rho = \varphi'(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{3\pi}{4} - i\left(\frac{3\pi}{4} - 1\right)\right].$$

On tire alors de la relation (3), compte tenu de la valeur trouvée pour I_1,

$$I_2 = -\pi\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{4} + 1\right),$$

et finalement
$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\alpha^{-\frac{7}{2}}(6\log\alpha - 3\pi - 4).$$

2° On tire de (1)
$$\frac{I\alpha^{\frac{7}{2}}}{\log\alpha} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{4\log\alpha}I_2,$$

les intégrales I_1 et I_2 étant finies. Quand α croît indéfiniment, le second membre tend vers $\dfrac{1}{2}I_1$; donc I est alors un infiniment grand équivalent à

$$\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\alpha^{-\frac{7}{2}}\log\alpha,$$

ce qui détermine les constantes A et p de l'énoncé.

Problème 26.

On considère une famille de droites D, dépendant de deux paramètres variables indépendants α, β, *représentées dans un système d'axes rectangulaires par les équations*

$$(1) \qquad \frac{x - B}{A} = \frac{y - B_1}{A_1} = \frac{z - B_2}{A_2},$$

A, B, A_1, B_1, A_2, B_2 *étant des fonctions des deux paramètres* α *et* β, *de telle façon qu'à chaque système de valeurs de ces deux paramètres correspond une droite* D *de la famille considérée.*

1° *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes ces droites soient normales à une famille de surfaces parallèles* S *est que l'expression*

$$\frac{A dB + A_1 dB_1 + A_2 dB_2}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}},$$

soit une différentielle exacte.

On pourra prendre comme inconnue auxiliaire la valeur commune u *des rapports* (1).

2° *On considère en particulier les droites représentées par les équations*

$$(2) \qquad \frac{x - f(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{y}{\varphi(\beta)} = \frac{z - \alpha}{\alpha - \beta},$$

où f *et* φ *ne dépendent que des variables* α *et* β *respectivement.*

Démontrer que ces droites ne peuvent être normales à une famille de surfaces S *que si* $f^2(\alpha)$ *est un trinome du second degré en* α, *et* $\varphi^2(\beta)$ *un trinome du second degré en* β. *Le premier étant donné,* $f^2(\alpha) = P\alpha^2 + 2Q\alpha + R$, *trouver* $\varphi^2(\beta)$.

3° *En supposant* $f^2(\alpha) = 2p\alpha$, *déterminer les surfaces* S *et leurs lignes de courbure.*

(*Paris, oct.* 1924, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° Soit u le vecteur unitaire de composantes

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}, \qquad \frac{A_1}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}, \qquad \frac{A_2}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}};$$

si P est le point de coordonnées (B, B_1, B_2), un point M de la droite $D(\alpha, \beta)$ sera défini par l'équation vectorielle

$$(3) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{P} + \rho u,$$

où ρ désigne la valeur algébrique du segment $\overline{PM}$ compté positivement dans le sens de u. Pour que les équations (1) définissent une congruence de normales, il faut et il suffit [1] que l'on puisse déterminer une fonction $\rho(\alpha, \beta)$ de telle sorte que l'on ait

$$(4) \qquad u \,.\, d\mathbf{M} = u \,.\, d\mathbf{P} + d\rho = 0,$$

[1] II, 149.

ce qui revient à dire que l'expression

$$u \, . \, dP = \frac{A dB + A_1 dB_1 + A_2 dB_2}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}$$

doit être une différentielle totale exacte. L'équation (4) détermine alors ρ à une constante additive près, et en portant cette valeur dans l'équation (3) on aura la famille de surfaces parallèles trajectoires orthogonales des droites de la congruence.

2° Si la congruence est définie par les équations (2), l'équation (4) s'écrit

$$(5) \qquad d\rho + \frac{ff' + \alpha - \beta}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + (\alpha - \beta)^2}} d\alpha = 0.$$

Il en résulte d'abord que ρ est indépendant de β ; ensuite, en intégrant (5), on aura

$$\rho(\alpha) = -\sqrt{f^2 + \varphi^2 + (\alpha - \beta)^2} - \sigma(\beta).$$

On en déduit

$$(6) \qquad [\rho(\alpha) + \sigma(\beta)]^2 = f^2 + \varphi^2 + (\alpha - \beta)^2,$$

d'où, en dérivant successivement par rapport à α et β,

$$\rho'\sigma' = -1,$$

ce qui exige que ρ' et σ' soient des constantes non nulles. Posons

$$\rho' = \mu, \qquad \sigma' = -\frac{1}{\mu}, \qquad \rho + \sigma = \mu\alpha - \frac{\beta}{\mu} + \mu_1 ;$$

la relation (6) devient

$$(7) \qquad \left(\mu\alpha - \frac{\beta}{\mu} + \mu_1\right)^2 \equiv f^2 + \varphi^2 + (\alpha - \beta)^2.$$

Donnons à β une valeur numérique déterminée : on voit que f^2 est un trinome du second degré en α. De même φ^2 est un trinome du second degré en β.

Posons

$$f^2(\alpha) = P\alpha^2 + 2Q\alpha + R,$$

les coefficients P, Q, R étant supposés connus, et

$$\varphi^2(\beta) = b_0\beta^2 + 2b_1\beta + b_2.$$

Portons ces valeurs dans (7) et identifions les deux polynomes du second degré en α et β ainsi obtenus ; les termes en $\alpha\beta$ ont le même coefficient, -2, et en égalant les cinq autres coefficients on aura cinq équations pour déterminer les cinq inconnues b_0, b_1, b_2, μ et μ_1. On trouve ainsi

$$b_0 = -\frac{P}{P+1}, \qquad b_1 = -\frac{Q}{P+1}, \qquad b_2 = \frac{Q^2}{P+1} - R ;$$

la seule condition de possibilité est donc $P \neq -1$.

3° On voit sur les équations (2) que les droites de la congruence rencontrent toutes la courbe Γ_1 définie par les équations

$$x = f(\alpha), \qquad y = 0, \qquad z = \alpha.$$

Comme les équations (2) peuvent encore s'écrire

$$\frac{x}{f(\alpha)} = \frac{y + \varphi(\beta)}{\varphi(\beta)} = \frac{z - \beta}{\alpha - \beta},$$

les droites de la congruence rencontrent toutes la courbe Γ_2 d'équations

$$x = 0, \qquad y = -\varphi(\beta), \qquad z = \beta.$$

Ainsi, quelles que soient les fonctions f et φ, les équations (2) représentent une congruence dont les deux nappes focales se réduisent à deux courbes planes situées dans des plans rectangulaires.

En particulier, si l'on suppose que les fonctions $f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ satisfont aux conditions précédemment trouvées et si l'on prend

$$f^2(\alpha) = 2p\alpha, \qquad \text{on aura} \qquad \varphi^2(\beta) = p^2 - 2p\beta.$$

Les courbes Γ_1 et Γ_2 sont les deux paraboles

$$x^2 - 2pz = y = 0 \qquad \text{et} \qquad y^2 + 2pz - p^2 = x = 0\,;$$

elles forment la développée de la surface S, et nous savons que cette surface sera une cyclide de Dupin([1]).

Pour former les équations paramétriques de S, nous pourrons supposer $p > 0$; nous aurons alors, en faisant dans l'équation (5) $\beta = 0$,

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{p + \alpha}{\sqrt{(p+\alpha)^2}} = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = a - \alpha.$$

On aura d'autre part

$$A^2 + A_1^2 + A_2^2 = 2p\alpha + p^2 - 2p\beta + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta + p)^2,$$

et, comme $\beta < \frac{p}{2}$, $\alpha - \beta + p > 0$,

$$\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2} = \alpha - \beta + p\,;$$

les composantes du vecteur u sont donc

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha - \beta + p}, \qquad \frac{\varphi(\beta)}{\alpha - \beta + p}, \qquad \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta + p},$$

et les équations paramétriques de S s'écrivent

$$(8) \qquad x = f + \frac{(a - \alpha)f}{\alpha - \beta + p}, \qquad y = \frac{(a - \alpha)\varphi}{\alpha - \beta + p}, \qquad z = \alpha + \frac{(a - \alpha)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta + p}.$$

D'ailleurs les développables non singulières de la congruence (2) sont des cônes ayant leurs sommets sur l'une des courbes Γ_1 ou Γ_2 et passant par l'autre. Analytiquement, elles sont donc définies par l'une ou l'autre des équations

$$\alpha = C^{te}, \qquad \beta = C^{te},$$

et ces mêmes équations représentent les lignes de courbure de la surface S définie par les équations (8).

---

(1) II, 143.

On voit sans peine que les lignes de courbure de la première famille sont les cercles caractéristiques de la famille de sphères

$$(x-f)^2+y^2+(z-\alpha)^2-(a-\alpha)^2=0,$$

celles de la seconde famille les cercles caractéristiques de la famille de sphères

$$x^2+(y+\varphi)^2+(z-\beta)^2-(a-\beta+p)^2=0,$$

et la surface S est l'enveloppe de l'une ou l'autre de ces deux familles.

Problème 27.

Soient C_1, C_2 *deux cercles de rayons* R_1, R_2 *respectivement, ayant pour centre l'origine dans le plan de la variable complexe* z, *et* M_1, M_2 *deux nombres positifs. Déterminer deux constantes réelles* A *et* a *telles que le module de la fonction* $f(z)=Az^a$ *soit égal à* M_1 *sur le cercle* C_1 *et* M_2 *sur le cercle* C_2.

Application. — Soit $F(z)$ *une fonction holomorphe dans la couronne circulaire comprise entre les deux cercles* C_1, C_2 *et sur ces cercles eux-mêmes ; soit* M_1 *une limite supérieure du module de* $F(z)$ *sur* C_1, *et* M_2 *une limite supérieure de ce module sur* C_2. *Déduire de ce qui précède une limite supérieure du module de* $F(z)$ *en un point* z *de la couronne de module* r.

(*Paris, oct.* 1924, *épr. écr.* : 2[e] *quest.*)

On peut évidemment supposer A positif. On a alors pour déterminer les constantes réelles A et a les deux équations

$$AR_1^a=M_1, \qquad AR_2^a=M_2,$$

d'où l'on tire $\quad a=\dfrac{\log M_1-\log M_2}{\log R_1-\log R_2}, \qquad A=M_1R_1^{-a}=M_2R_2^{-a}.$

Avant de faire l'application de ce résultat, nous établirons deux lemmes généraux.

Lemme I. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine connexe D ; si le module de $f(z)$ reste constant dans une aire, si petite soit-elle, intérieure à D, la fonction $f(z)$ garde une valeur constante dans tout le domaine.

Posons en effet

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y), \qquad \text{d'où} \qquad |f(z)|=\sqrt{P^2+Q^2}.$$

Si l'on a, dans une aire σ intérieure à D, $|f(z)|=C^{te}$, on en déduira

$$P\frac{\partial P}{\partial x}+Q\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \qquad P\frac{\partial P}{\partial y}+Q\frac{\partial Q}{\partial y}=0,$$

c'est-à-dire
$$P\frac{\partial P}{\partial x}-Q\frac{\partial P}{\partial y}=0, \qquad P\frac{\partial P}{\partial y}+Q\frac{\partial P}{\partial x}=0,$$

donc
$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=0 \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

La fonction $f(z)$ est donc constante en tout point de l'aire σ, et la méthode du prolongement analytique lui assigne la même valeur constante en tout point de D.

Lemme II. — Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine borné D et sur sa frontière que nous pouvons supposer formée d'un ou plusieurs contours simples; l'ensemble des valeurs du module de $f(z)$ dans le domaine D et sur son contour est évidemment borné. Je dis qu'il est impossible que $|f(z)|$ atteigne effectivement sa borne supérieure μ en un point *intérieur* au domaine D, exception faite du cas banal où $f(z)$ se réduit à une constante.

En effet supposons qu'il existe un point a intérieur à D tel que l'on ait $|f(a)| = \mu$. On peut, d'après le lemme I, entourer le point a d'un cercle γ de rayon r, tout entier intérieur à D, sur la circonférence duquel $|f(z)|$ ne pourra prendre la valeur μ qu'en des points isolés; on aura alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

d'où l'on tire $$|f(a)| < \frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{r}\cdot 2\pi r \quad \text{ou} \quad |f(a)| < \mu,$$

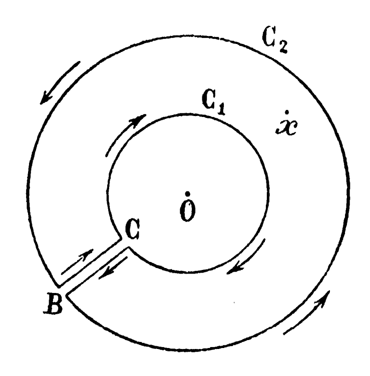
ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale.

Il résulte de ce lemme que si M est une limite supérieure des valeurs du module de $f(z)$ *sur le contour* de D, c'est aussi une limite supérieure pour les valeurs de $|f(z)|$ *à l'intérieur* de D.

Passons maintenant à l'application proposée. Nous supposerons les constantes A et a choisies de telle sorte que la fonction Az^a prenne la valeur M_1 sur C_1 et la valeur M_2 sur C_2. On aura alors, sur chacun des cercles C_1 et C_2,

$$\left|\frac{1}{A}z^{-a}F(z)\right| < 1.$$

Soit x un point quelconque intérieur à la couronne comprise entre C_1 et C_2. Joignons les contours C_1 et C_2 par une coupure rectiligne BC ne rencontrant pas x. On aura, d'après le théorème de Cauchy, en posant $\frac{1}{A}z^{-a}F(z) = \varphi(z)$,



$$2\pi i\varphi(x) = \int_{C_2}\frac{\varphi(z)dz}{z-x} + \int_{BC}\frac{e^{-2\pi i a}\varphi(z)dz}{z-x} + \int_{C_1}\frac{e^{-2\pi i a}\varphi(z)dz}{z-x} + \int_{CB}\frac{\varphi(z)dz}{z-x},$$

l'intégrale le long de C_2 étant prise dans le sens direct à partir de B, et l'intégrale le long de C_1 dans le sens rétrograde à partir de C; on peut encore écrire

$$2\pi i\varphi(x) = \int_{C_2} + e^{-2\pi i a}\int_{C_1} + (1 - e^{-2\pi i a})\int_{CB},$$

la fonction à intégrer étant partout $\frac{\varphi(z)}{z-x}$.

Considérons l'élément $\frac{1}{z-x}$. Si l'on pose $|x| = r$, le maximum de son module est $\frac{1}{R_2 - r}$ sur C_2 et $\frac{1}{r - R_1}$ sur C_1. Pour avoir sur le segment rectiligne BC un maxi-

15747

mum aussi faible que possible, il faudra prendre BC sur le prolongement du rayon qui passe par x, et le maximum correspondant sera $\frac{1}{r+R_1}$. On aura donc finalement

$$2\pi|\varphi(x)| < \frac{2\pi R_2}{R_2 - r} + \frac{2\pi R_1}{r - R_1} + |1 - e^{-2\pi i a}|\left|\int_{R_1}^{R_2} \frac{\varphi(z)dz}{z - x}\right|.$$

Pour trouver une limite supérieure du module de cette dernière intégrale, supposons $a < 0$, ce qui exige $M_1 > M_2$. On aura alors, d'après le lemme II,

$$|F(z)| < M_1, \quad \text{donc} \quad |z^{-a}F(z)| < M_1 R_2^{-a}, \quad \text{ou encore} \quad |z^{-a}F(z)| < A\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-a}.$$

Si au contraire $a > 0$, ce qui exige $M_2 > M_1$, on aura

$$|F(z)| < M_2, \quad \text{donc} \quad |z^{-a}F(z)| < M_2 R_1^{-a}, \quad \text{ou encore} \quad |z^{-a}F(z)| < A\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{a}$$

On peut donc écrire dans tous les cas

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} \frac{\varphi(z)dz}{z - x}\right| < \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{|a|} \frac{R_2 - R_1}{r + R_1},$$

d'où l'on tire

(1) $$|F(x)| < Ar^a\left[\frac{R_2}{R_2 - r} + \frac{R_1}{r - R_1} + \frac{1}{2\pi}|1 - e^{-2\pi i a}|\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{|a|}\frac{R_2 - R_1}{r + R_1}\right].$$

Remarque. — On peut obtenir immédiatement une limite supérieure de $F(x)$ en partant de la formule de Cauchy

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{F(z)dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{F(z)dz}{z - x},$$

les deux intégrales étant prises dans le sens direct. On aura ainsi

(2) $$|F(x)| < \frac{M_2 R_2}{R_2 - r} + \frac{M_1 R_1}{r - R_1}.$$

Dans le cas particulier où a est un entier, positif ou négatif, l'inégalité (1) se réduit à

$$|F(x)| < Ar^a\left(\frac{R_2}{R_2 - r} + \frac{R_1}{r - R_1}\right).$$

On pourra vérifier, en distinguant les deux cas $a > 0$ et $a < 0$, que cette dernière limite est plus faible, donc plus avantageuse, que celle qui est fournie par l'inégalité (2).

Problème 28.

1° *Déterminer une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

(E) $$z^2(p^2 + q^2 + 4) - 16 = 0.$$

2° *Déterminer les surfaces intégrales de l'équation* (E) *qui passent par le cercle* (C)

$$z = 1, \qquad 4(x^2 + y^2) - 3 = 0.$$

3° *L'une des intégrales passant par* (C) *est une surface fermée du second degré. On demande sa surface totale.* *(Paris, oct. 1924, épr. prat.)*

1° Il suffit d'écrire le système des caractéristiques de toute équation de la forme $F(z, p, q) = 0$ pour apercevoir immédiatement l'intégrale première $\frac{p}{q} = C^{te}$. Posons donc

$$p = 2\rho \cos \theta, \qquad q = 2\rho \sin \theta, \qquad (\theta = C^{te});$$

on en tire, en portant ces valeurs dans l'équation (E),

$$\rho = \frac{\varepsilon\sqrt{4 - z^2}}{z} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

L'équation $dz = pdx + qdy$ s'écrit alors

$$dz = 2\rho(\cos \theta\, dx + \sin \theta\, dy), \qquad \frac{zdz}{\varepsilon\sqrt{4 - z^2}} = 2(\cos \theta dx + \sin \theta dy),$$

et on a l'intégrale complète

(1) $$x \cos \theta + y \sin \theta \pm \sqrt{1 - \frac{z^2}{4}} + a = 0,$$

a désignant une constante arbitraire. Cette équation représente tous les cylindres déduits par un déplacement parallèle au plan xOy du cylindre

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

2° Pour résoudre le problème de Cauchy relatif au cercle C, appliquons la méthode classique[1]. On peut représenter ce cercle par les équations paramétriques

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \qquad z = 1.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1); elle s'écrira

(2) $$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos (t - \theta) + a \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Dérivons par rapport à t; nous aurons

$$\sin (t - \theta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \cos (t - \theta) = \pm 1,$$

et l'équation (2) donne alors pour a l'une des valeurs

$$0, \qquad +\sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3}.$$

Supposons a remplacé par l'une de ces valeurs dans l'équation (1); nous aurons, en dérivant par rapport à θ,

(3) $$-x \sin \theta + y \cos \theta = 0,$$

d'où, en éliminant θ entre (1) et (3),

$$x^2 + y^2 = \left(a \pm \sqrt{1 - \frac{z^2}{4}}\right)^2.$$

---

(1) II, 241.

Si l'on prend $a = 0$, on a la surface du second degré

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\,;$$

si l'on prend $a = \pm\sqrt{3}$, on a d'abord

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{z^2}{4} \pm 2\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{z^2}{4}},$$

puis, par une nouvelle élévation au carré,

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 4\right)^2 = 12 - 3z^2,$$

équation d'une surface fermée du quatrième degré, qui est de révolution autour de Oz. Telles sont les deux surfaces intégrales de (E) qui passent par C.

3° La surface

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

est un ellipsoïde de révolution autour de Oz, ayant son centre à l'origine. Pour calculer sa surface, nous la représenterons paramétriquement par les équations

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = 2 \cos u\,;$$

on aura tous les points de la surface en faisant varier u de zéro à π, et v de zéro à 2π. On trouve, pour les coefficients du ds^2,

$$E = \cos^2 u + 4 \sin^2 u, \qquad F = 0, \qquad G = \sin^2 u,$$

et par suite, pour l'élément d'aire,

$$d\sigma = \sin u \sqrt{\cos^2 u + 4 \sin^2 u}\, du dv.$$

On aura donc, pour l'aire de l'ellipsoïde,

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u \sqrt{4 - 3\cos^2 u}\, du = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} + 1\right).$$

Problème 29.

Soient Ox, Oy, Oz *un système de trois axes rectangulaires. En un point* M *d'une surface* S, *on mène le plan tangent qui coupe le plan* xOy *suivant une droite* D. *On désignera par* δ *la distance de l'origine à cette droite* D *et par* ρ *la distance du point* M *à l'axe* Oz.

1° *Les surfaces* S *pour lesquelles la distance* δ *est égale à une fonction donnée de* ρ, $\delta = \varphi(\rho)$, *sont déterminées par une équation aux dérivées partielles du 1er ordre. On demande de montrer que l'on peut obtenir une intégrale complète de cette équation par une quadrature, quelle que soit la fonction* $\varphi(\rho)$.

2° *Achever l'intégration dans le cas particulier où* $\varphi(\rho) = \rho$, *et trouver les surfaces* S *qui passent par la courbe* Γ *représentée par les deux équations*

(Γ) $$x = y, \qquad z = x^m,$$

m étant une constante donnée.

3° *Trouver, dans le cas particulier où $\varphi(\rho) = \rho$, les équations générales des courbes caractéristiques, et montrer qu'il en existe une infinité situées sur des cônes de révolution ayant l'origine pour sommet. Quelles sont les surfaces intégrales dont toutes les caractéristiques possèdent cette propriété?*

(*Paris, juin* 1925, *épr. écr. :* 1re *quest.*)

1° Le plan tangent au point (x, y, z) coupe le plan des xy suivant la droite

$$pX + qY - (px + qy - z) = 0;$$

on a donc
$$\delta = \frac{px + qy - z}{\varepsilon\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

et l'équation aux dérivées partielles des surfaces S s'écrit

$$(1) \qquad px + qy - z = \varepsilon\sqrt{p^2 + q^2}\,\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

On est conduit naturellement à passer aux coordonnées semi-polaires

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z.$$

Posant
$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = P, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = Q,$$

on trouve, par un calcul classique,

$$p = P\cos\theta - \frac{Q}{\rho}\sin\theta, \qquad q = P\sin\theta + \frac{Q}{\rho}\cos\theta,$$

et l'équation (1) s'écrit

$$P\rho - z = \frac{\varepsilon\sqrt{\rho^2P^2 + Q^2}}{\rho}\varphi(\rho),$$

ou encore

$$(2) \qquad (\rho^2P^2 + Q^2)f(\rho) - (P\rho - z)^2 = 0 \qquad \left[f(\rho) = \frac{\varphi^2}{\rho^2}\right].$$

Le système différentiel des caractéristiques de l'équation (2) s'écrit

$$\frac{d\rho}{2\rho[z + P\rho(f - 1)]} = \frac{d\theta}{2Qf} = \frac{dz}{2f(\rho^2P^2 + Q^2) - 2\rho P(\rho P - z)}$$
$$= \frac{-dP}{(\rho^2P^2 + Q^2)f' + 2\rho P^2 f} = \frac{-dQ}{2Q(P\rho - z)};$$

compte tenu de l'équation (2) elle-même, on aperçoit la combinaison intégrable

$$\frac{dz}{z} = \frac{dQ}{Q}.$$

On sait dès lors (¹) que l'équation

$$(3) \qquad Q = \alpha z,$$

où α est une constante quelconque, admet en commun avec l'équation (2) une

(¹) II, 240.

famille de surfaces intégrales à un paramètre, qui formera une intégrale complète de (2). Or l'intégrale générale de l'équation (3) s'écrit

(4) $$z = e^{\alpha\theta}u(\rho),$$

$u(\rho)$ désignant une fonction arbitraire ; portant cette valeur de z dans l'équation (2), on aura pour déterminer u, l'équation différentielle

(5) $$\rho^2 u'^2(f-1) + 2\rho u u' + u^2(\alpha^2 f - 1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{u'}{u} = \sigma(\rho), \qquad u = e^{\int \sigma d\rho}.$$

Il suffira de remplacer u par cette expression dans l'équation (4) pour obtenir l'intégrale complète cherchée. Sa détermination n'exige, quelle que soit la fonction donnée $\varphi(\rho)$, que la quadrature qui donne $\int \sigma(\rho)d\rho$.

2° Si l'on prend $\varphi(\rho) = \rho$, on a $f = 1$, et l'équation (5) devient

$$2\rho u' + u(\alpha^2 - 1) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u = \beta\rho^{\frac{1-\alpha^2}{2}}$$

On a donc l'intégrale complète

(6) $$z = \beta\rho^{\frac{1-\alpha^2}{2}} e^{\alpha\theta},$$

d'où l'on déduit l'intégrale générale par le procédé classique.

La courbe Γ a pour équations en coordonnées polaires

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad z = 2^{-\frac{m}{2}}\rho^m ;$$

portons ces valeurs dans l'équation (6), elle s'écrit

(7) $$\beta\rho^{\frac{1-\alpha^2}{2}} e^{\alpha\frac{\pi}{4}} - 2^{-\frac{m}{2}}\rho^m = 0.$$

Suivant la méthode générale de résolution du problème de Cauchy, dérivons l'équation (7) par rapport à ρ ; nous aurons

(8) $$\beta\frac{1-\alpha^2}{2}\rho^{-\frac{1+\alpha^2}{2}} e^{\alpha\frac{\pi}{4}} - m2^{-\frac{m}{2}}\rho^{m-1} = 0.$$

Éliminant ρ entre (7) et (8) et supprimant la solution parasite $\beta = 0$, on aura

$$\alpha = \pm\sqrt{1-2m},$$

et l'équation (6) s'écrira

$$z = \beta\rho^m e^{\alpha\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}, \qquad (\alpha = \varepsilon\sqrt{1-2m}).$$

La famille de surfaces représentée par cette dernière équation n'a évidemment pas d'enveloppe : elle doit donc contenir la surface cherchée. Il est clair en effet que la surface intégrale

$$z = 2^{-\frac{m}{2}}\rho^m e^{\alpha\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}, \qquad (\alpha = \varepsilon\sqrt{1-2m}),$$

passe par la courbe Γ.

3° Nous obtiendrons les caractéristiques demandées en partant de l'intégrale complète connue [1]. Elles sont représentées par l'équation (6) jointe à l'équation que l'on obtient en y considérant β comme une fonction de α, dérivant par rapport à α, et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par une constante arbitraire γ, ce qui donne

$$\beta(\theta - \alpha \log \rho) + \gamma = 0. \tag{9}$$

On tire des équations (6) et (9)

$$\frac{z}{\rho} = k\rho^{\frac{\alpha^2-1}{2}},$$

k désignant une constante : pour une caractéristique située sur un cône de révolution d'axe Oz le premier membre est constant, ce qui exige que l'on ait

$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

et par suite

$$\alpha = \pm 1 = \varepsilon.$$

Les caractéristiques cherchées sont donc définies par les équations

$$z = \beta e^{\varepsilon\theta}, \qquad \rho = e^{\varepsilon\left(\theta + \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

qu'on peut encore écrire

$$ze^{-\varepsilon\theta} = C^{te}, \qquad \rho e^{-\varepsilon\theta} = C^{te}.$$

Toute surface engendrée par ces courbes est définie par une équation de la forme

$$z = e^{\varepsilon\theta}F(\rho e^{-\varepsilon\theta}).$$

Remplaçant F par cette valeur dans l'équation (2) où l'on fait $f = 1$, on obtient la condition $F' = 0$. Les surfaces intégrales cherchées sont donc les conoïdes

$$z = Ce^{\varepsilon\theta}.$$

Problème 30.

Soit $U(x, y) = C^{te}$ *l'équation générale d'une famille de courbes planes* Γ, *dans un système d'axes rectangulaires. On demande la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire la fonction* $U(x, y)$ *pour que les courbes qui coupent les courbes* Γ *sous un angle constant* α *soient représentées, quel que soit* α, *par une équation de la forme*

$$U(x, y) + V(x, y) \operatorname{tg} \alpha = C, \tag{1}$$

la fonction $V(x, y)$ *étant indépendante de* α *et* C *désignant une constante arbitraire.*

---

[1] II, 234.

Expliquer le résultat au moyen de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Application. — *Trouver l'équation générale des courbes qui coupent sous un angle constant* α *les circonférences passant par deux points fixes de coordonnées*

$$x = \pm a, \qquad y = 0.$$

Que deviennent ces courbes lorsque a tend vers zéro?

(*Paris, juin* 1925, *épr. écr.* : 2e *quest.*)

Soient m et m' les coefficients angulaires des tangentes en un point (x, y) à la courbe Γ et à la courbe de la famille (1) qui passent en ce point. On a

$$m = -\frac{U_x}{U_y}, \qquad m' = -\frac{U_x + V_x \operatorname{tg} \alpha}{U_y + V_y \operatorname{tg} \alpha}.$$

Pour que les trajectoires sous l'angle α des courbes Γ soient représentées par l'équation (1), il faut donc que l'on ait

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \frac{U_x(U_y + V_y \operatorname{tg} \alpha) - U_y(U_x + V_x \operatorname{tg} \alpha)}{U_x(U_x + V_x \operatorname{tg} \alpha) + U_y(U_y + V_y \operatorname{tg} \alpha)},$$

ou encore, après division par le facteur non nul $\operatorname{tg} \alpha$,

$$1 = \frac{U_x V_y - U_y V_x}{U_x^2 + U_y^2 + (U_x V_x + U_y V_y) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Cette relation ne peut avoir lieu identiquement pour toutes les valeurs de α que si l'on a

$$(2) \qquad U_x V_x + U_y V_y = 0, \qquad U_x V_y - U_y V_x = U_x^2 + U_y^2.$$

Ainsi pour que les trajectoires sous l'angle α des courbes Γ soient représentées par une équation de la forme (1), il faut qu'il existe une fonction $V(x, y)$ satisfaisant au système (2) où U est une fonction connue. La condition est d'ailleurs suffisante puisque le calcul précédent montre que si V satisfait au système (2) l'expression $\dfrac{m' - m}{1 + mm'}$ se réduit à $\operatorname{tg} \alpha$.

On tire alors de la première équation (2)

$$(3) \qquad V_x = \rho U_y, \qquad V_y = -\rho U_x,$$

ρ désignant une inconnue auxiliaire; portant dans la seconde équation (2) on aura $\rho = -1$, et les relations (3) s'écriront

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x};$$

ce sont les relations qui expriment que $U + iV$ est une fonction analytique de $x + iy$. Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée est que la fonction U soit harmonique; la fonction V est alors la fonction harmonique associée.

Ce résultat s'explique aisément au moyen de la théorie des fonctions analytiques. Si l'on suppose en effet que $U + iV$ soit une fonction analytique, les équations

$$X = U(x, y), \qquad Y = V(x, y)$$

définissent une représentation conforme [1] du plan (x, y) sur le plan (X, Y), les axes de coordonnées étant toujours supposés rectangulaires. Aux courbes Γ du plan (x, y) correspondent dans le plan (X, Y) les droites $X = C^{te}$ parallèles à l'axe des Y; puisque la représentation conforme conserve les angles, aux trajectoires sous l'angle α des courbes Γ correspondront des courbes dont la tangente en chaque point fera l'angle α avec l'axe des Y, c'est-à-dire la famille de droites parallèles

$$X + Y \operatorname{tg} \alpha = C^{te},$$

et réciproquement à cette famille de droites parallèles du plan (X, Y) correspondront les courbes

$$U(x, y) + V(x, y) \operatorname{tg} \alpha = C^{te},$$

qui seront les trajectoires sous l'angle α des courbes Γ.

Application. — Les circonférences considérées sont définies par l'équation

$$\lambda \equiv \frac{x^2 - a^2}{y} + y = C^{te}.$$

Nous avons donc à déterminer une fonction $U(\lambda)$ qui soit harmonique par rapport à x et y, puis une fonction V telle que $U + iV$ soit analytique.

Désignant par des accents les dérivées successives de U par rapport à λ, on trouve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{2}{y} U' + \frac{4x^2}{y^2} U'', \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - a^2)}{y^3} U' + \left(1 - \frac{x^2 - a^2}{y^2}\right)^2 U'';$$

tenant compte des identités

$$\frac{2}{y} + \frac{2(x^2 - a^2)}{y^3} = \frac{2\lambda}{y^2}, \qquad \frac{4x^2}{y^2} + \left(1 - \frac{x^2 - a^2}{y^2}\right)^2 = \frac{4a^2 + \lambda^2}{y^2},$$

on voit que la relation $\Delta_2 U = 0$, qui exprime que U est harmonique, s'écrit

$$2\lambda U' + (4a^2 + \lambda^2) U'' = 0.$$

Comme on n'a besoin que d'une solution particulière, on peut prendre

$$U' = \frac{1}{\lambda^2 + 4a^2}.$$

Posons alors $\quad z = x + iy, \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y);$
on peut écrire

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - i\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) U' = \frac{2xy - i(y^2 - x^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2},$$

d'où [2], en faisant $y = 0$,

$$F'(x) = \frac{i}{x^2 - a^2} \qquad \text{et par suite} \qquad F'(z) = \frac{i}{z^2 - a^2}.$$

---

(1) II, 164.
(2) I, 145.

On en tire, en supposant $a \neq 0$,

$$F(z) = \frac{i}{2a} \operatorname{Log} \frac{z-a}{z+a}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{z-a}{z+a} = \frac{x-a+iy}{x+a+iy} = \frac{x^2+y^2-a^2+2iay}{(x+a)^2+y^2},$$

d'où
$$\operatorname{Log} \frac{z-a}{z+a} = \frac{1}{2} \log \frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

et par suite

$$U(x, y) = -\frac{1}{2a} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}, \qquad V(x, y) = \frac{1}{4a} \log \frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}.$$

Les courbes cherchées sont alors représentées par l'équation

$$U(x, y) + V(x, y) \operatorname{tg} \alpha = C^{te}.$$

Si $a = 0$, on a $F'(z) = \frac{i}{z^2}$, d'où

$$F(z) = \frac{-i}{z} = \frac{-y-ix}{x^2+y^2}, \qquad U = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad V = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

et les courbes cherchées sont représentées par l'équation

$$x^2+y^2+k(y+x \operatorname{tg} \alpha) = 0,$$

où k désigne une constante arbitraire : ce sont, comme il était évident *a priori*, des circonférences tangentes à l'origine à la droite $y + x \operatorname{tg} \alpha = 0$.

Problème 31.

Étant donnée l'équation

$$2(xy'+y^2)(1-x^2)+(3x^2-5)(y-1)+2(x^2-1)=0,$$

intégrer cette équation après avoir mis en évidence une intégrale particulière constante.

Trouver l'intégrale qui pour $x = 0$ est différente de 1.

Calculer les valeurs de cette intégrale pour $x = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$, la dernière avec trois décimales exactes.

(*Paris, juin* 1925, *épr. prat.*)

L'équation proposée est une équation de Riccati, qui admet l'intégrale particulière $y = 1$. Posant, suivant la méthode classique, $y = 1 + \frac{1}{u}$, on a l'équation linéaire

(1) $$2x(x^2-1)u' = u(x^2+1)+2(x^2-1).$$

Intégrant d'abord l'équation homogène, on trouve

$$u = A\sqrt{\left|\frac{x^2-1}{x}\right|},$$

et la méthode de variation des constantes donne ensuite

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\sqrt{|x(x^2-1)|}}.$$

Si l'on veut écarter les expressions imaginaires, on prendra donc

pour $x < -1$ $\quad u = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}\left[\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}} + a\right],$

pour $-1 < x < 0$ $\quad u = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\left[\int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(t^2-1)}} + a\right],$

pour $0 < x < 1$ $\quad u = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}\left[\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}} + a\right],$

pour $x > 1$ $\quad u = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\left[\int_{1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(t^2-1)}} + a\right],$

a désignant une constante arbitraire. Comme l'expression $t^{-\frac{1}{2}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}dt$ n'est pas une différentielle binome, l'intégrale générale ne peut s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires ; elle s'exprimerait par contre aisément au moyen des fonctions elliptiques.

L'intégrale particulière considérée dans l'énoncé est définie, dans l'intervalle (0, 1), par l'équation

$$y = 1 + \frac{1}{u} \qquad \text{avec} \qquad u = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}\left[\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}} + a\right],$$

où la constante a doit être telle que u ne soit pas infinie pour $x = 0$, ce qui exige que l'on ait $a = 0$. Pour $x = 0$, la fonction u se présente sous la forme $\infty \times 0$, et on lève facilement l'indétermination en écrivant

$$u = \frac{\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}}{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$$

et appliquant la règle de l'Hôpital, qui donne $u(0) = \left[\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}\right]_{x=0} = 2$. On aurait d'ailleurs obtenu cette valeur immédiatement en faisant dans l'équation (1) $x = 0$.

On aura donc, pour $x = 0$, $y = \frac{3}{2}$, et pour $x = \frac{1}{2}$,

$$y = 1 + \frac{1}{u_1} \qquad \text{avec} \qquad u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}.$$

Pour calculer u_1, nous écrirons

$$t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}t^{\frac{5}{2}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}t^{\frac{7}{2}} + \cdots,$$

d'où
$$\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2t^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{t^4}{9} + \cdots\right]$$

et $\quad u_1 = \sqrt{3}\,v \quad$ avec $\quad v = \sum_1^\infty v_n, \quad v_n = \dfrac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots 2n}\cdot\dfrac{1}{(4n+1)4^n}.$

Soit R_n la somme des termes de la série convergente (v_n) à partir de v_{n+1}; on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1}{4}, \qquad R_n < \frac{v_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) < \frac{v_n}{3}.$$

Ceci posé, on trouve successivement

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = 0{,}025, \qquad 0{,}0026 < v_3 < 0{,}00261, \qquad 0{,}0003 < v_4 < 0{,}00039,$$

la somme des quatre premiers termes est comprise entre 1,0279 et 1,02800, et l'on a $R_4 < \dfrac{39}{3\,.\,10^5}$; en prenant $v = 1{,}028$ on commet donc une erreur inférieure à

$$\frac{1}{10^4} + \frac{39}{3\,.\,10^5} = \frac{23}{10^5}.$$

On peut alors écrire

$$\sqrt{3} = 1{,}732, \qquad \Delta\sqrt{3} < \frac{6}{10^5}, \qquad v = 1{,}028, \qquad \Delta v < \frac{23}{10^5},$$

d'où
$$u_1 = 1{,}732 \times 1{,}028 = 1{,}780496, \qquad \Delta u_1 = \sqrt{3}\Delta v + v\Delta\sqrt{3},$$

$$1{,}73206 \times 23 + 1{,}02823 \times 6 \;[\text{illegible}]\; < \frac{47}{10^5};$$

donc u_1 est co[illegible]ntre 0,5614 et 0,5618 et enfin y entre 1,5614 e[illegible]e, avec trois décimales exactes,

Problème 32.

Une surface S *est représentée, dans un système d'axes rectangulaires, par les trois équations*

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho) + \varphi(\omega),$$

ρ *et* ω *étant deux variables indépendantes,* $f(\rho)$ *une fonction de* ρ, *et* $\varphi(\omega)$ *une fonction de* ω, *différente d'une constante.*

1° *On demande de déterminer la fonction* $f(\rho)$ *de façon que les sections de la surface* S *par les plans passant par* Oz *soient des lignes de courbure de cette surface. Indiquer un mode de génération des surfaces obtenues.*

2° *Démontrer que les lignes de courbure de la seconde famille sont situées sur des sphères de rayon constant.*

3° *Soit* $f(\rho)$ *une fonction satisfaisant à la condition précédente ; on considère les deux familles de surfaces* S_1, S_2 *représentées respectivement par les deux systèmes d'équations*

$$(S_1)\qquad x = \rho\cos\omega,\qquad y = \rho\sin\omega,\qquad z = f(\rho) + \varphi_1(\omega) + C_1,$$

$$(S_2)\qquad x = \rho\cos\omega,\qquad y = \rho\sin\omega,\qquad z = f(\rho) + \varphi_2(\omega) + C_2,$$

C_1 *et* C_2 *étant deux constantes arbitraires. Démontrer qu'il existe une infinité de systèmes de deux fonctions* $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, *telles que deux surfaces quelconques de deux familles différentes soient orthogonales. Déduire du résultat quelques systèmes triples-orthogonaux.* (*Paris, oct.* 1925, *épr. écr. : 1*re *quest.*)

1° L'équation classique des lignes de courbure s'écrit ici

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} (1+f'^2)d\rho + f'\varphi' d\omega & f'\varphi' d\rho + (\rho^2 + \varphi'^2)d\omega \\ \rho f'' d\rho - \varphi' d\omega & -\varphi' d\rho + (\rho^2 f' + \rho\varphi'')d\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation admette la solution $d\omega = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi'(1 + f'^2 + \rho f' f'') = 0.$$

Si l'on prend $\varphi' = 0$, on obtient des surfaces de révolution d'axe Oz, solution évidente et banale que nous écarterons dans la suite du problème. Il reste donc la solution

$$1 + f'^2 + \rho f' f'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\rho^2(1 + f'^2) = a^2,$$

a désignant une constante arbitraire ; posant ensuite

$$\rho = a\sin\theta,\qquad \sqrt{a^2 - \rho^2} = a\cos\theta,$$

on obtient finalement

$$f = a\left(\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right),$$

et l'on peut écrire les équations paramétriques d'une surface S sous la forme

$$(2)\qquad x = a\sin\theta\cos\omega,\qquad y = a\sin\theta\sin\omega,\qquad z = a\left(\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right) + \varphi(\omega),$$

$\varphi(\omega)$ désignant une fonction qui ne se réduit pas à une constante.

Considérons, dans un plan ρOz, la courbe Γ représentée paramétriquement par les équations

$$\rho = a\sin\theta,\qquad z = a\left(\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right).$$

On constate aisément que la portion de tangente comprise entre le point $M(\theta)$ et l'axe Oz a pour longueur a ; la courbe Γ est donc une *tractrice* de base Oz, et il est clair que la surface S peut être considérée comme engendrée par la courbe Γ qui se déplace parallèlement à Oz, pendant que son plan tourne autour de Oz, suivant une loi arbitrairement choisie caractérisée par la fonction $\varphi(\omega)$.

En particulier le sommet $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ de la tractrice décrit la courbe

$$x = a\cos\omega, \qquad y = a\sin\omega, \qquad z = \varphi(\omega),$$

qui est tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz.

2° Si l'on prend pour variable θ à la place de ρ, l'équation (1) s'écrit apres suppression du facteur $d\omega$,

$$(\varphi'^2 + a\varphi'' \cos\theta + a^2)\left(\varphi' d\omega + a\frac{d\theta}{\sin\theta}\right) = 0.$$

Mise à part la ligne de courbure singulière

$$\varphi'^2 + a\varphi'' \cos\theta + a^2 = 0,$$

la seconde famille de lignes de courbure est donc définie par l'équation

$$\varphi(\omega) + a \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = b,$$

b désignant une constante arbitraire. Les équations (2) montrent immédiatement que ces lignes sont situées sur les sphères Σ

$$x^2 + y^2 + (z - b)^2 = a^2,$$

qui ont même rayon a et leur centre sur Oz.

Ce résultat est facile à retrouver géométriquement. En effet, d'après le théorème de Kœnigs [1], les courbes de contact C des cônes circonscrits à S et ayant leur sommet sur Oz sont conjuguées aux tractrices Γ : elles forment donc la seconde famille de lignes de courbure. Considérons un tel cône de sommet I, et soit M un point de la courbe de contact C; le plan MIz coupe S suivant une tractrice Γ dont la tangente en M est précisément IM : on a donc $IM = a$, ce qui prouve bien que C est sur la sphère de centre I et de rayon a. Nous voyons en outre que les sphères Σ coupent orthogonalement la surface S.

3° Les coefficients directeurs de la normale à une surface S sont

$$\varphi' \sin\omega - \rho f' \cos\omega, \qquad -\varphi' \cos\omega - \rho f' \sin\omega, \qquad \rho;$$

la condition d'orthogonalité des surfaces S_1 et S_2 s'écrit donc, toutes réductions faites,

$$\varphi_1'\varphi_2' + a^2 = 0. \tag{3}$$

Il existe évidemment une infinité de systèmes de fonctions φ_1 et φ_2 vérifiant la relation (3). D'après une remarque antérieure les sphères Σ coupent orthogonalement les surfaces S : à tout système de fonctions φ_1, φ_2 vérifiant (3) correspond donc un système triple orthogonal comprenant les familles S_1 et S_2 et la famille de sphères Σ.

On pourra prendre, par exemple,

$$\varphi_1 = ka\omega, \qquad \varphi_2 = -\frac{a}{k}\omega, \qquad \text{(surfaces hélicoïdes)},$$

$$\varphi_1 = kae^{\omega}, \qquad \varphi_2 = \frac{a}{k}e^{-\omega},$$

$$\varphi_1 = ka\log\cos\omega, \qquad \varphi_2 = \frac{a}{k}\log\sin\omega, \qquad \text{etc.}$$

---

[1] II, 130.

Problème 33.

Étant donnée une équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0,$$

on demande la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ *pour que cette équation admette une intégrale première de la forme*

$$\mathrm{H}(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{K}(x)y = \mathrm{C},$$

H *et* K *étant des fonctions déterminées de* x *et* C *une constante arbitraire.*

Il existe une infinité de systèmes de trois polynomes $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ *satisfaisant à cette condition, et tels que l'équation* (E) *admette l'intégrale particulière* $y = \sin x$. *Former l'expression générale de ces polynomes, et achever l'intégration de l'équation* (E) *dans ce cas particulier.*

(*Paris, oct.* 1925, *épr. écr. : 2e quest.*)

Supposons $\mathrm{H} \not\equiv 0$. L'équation (E) doit être identique à l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\frac{dy}{dx} + \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{H}}y = 0,$$

ce qui exige $\quad \mathrm{H} = e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx}, \qquad \mathrm{K} = qe^{\int_{x_0}^{x} p\,dx}, \qquad \mathrm{K}' = re^{\int_{x_0}^{x} p\,dx}.$

La condition cherchée exprimera simplement la compatibilité des deux dernières relations, ce qui donne

$$(1) \qquad q' + pq = r.$$

Si p, q et r sont trois polynomes, l'équation (E) ne peut admettre l'intégrale particulière $y = \sin x$ que si les coefficients de $\sin x$ et de $\cos x$ dans le premier membre s'annulent séparément, ce qui exige

$$(2) \qquad q = 1, \qquad p = r.$$

Comme les relations (2) entraînent (1), on voit qu'on pourra prendre pour p et r un polynome arbitraire, q se réduisant à 1. L'équation (E) s'écrit alors

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)p(x) = 0,$$

et elle admet l'intégrale intermédiaire

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)e^{\int p\,dx} = \mathrm{C};$$

l'intégration de l'équation $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{C}e^{-\int p\,dx}$

se ramène alors à des quadratures par la méthode de variation des constantes [1].

[1] II, 41.

Le cas où $H = 0$ se traite d'une façon analogue. On trouve que les fonctions p, q et r doivent vérifier les conditions

$$(3) \qquad q = p' + \frac{p^2}{3}, \qquad r = \frac{1}{3}(''+pp') + d\frac{p^3}{27};$$

tenant compte de (2) on voit d'abord que, si p, q et r sont des polynomes, la première relation (3) où l'on fait $q = 1$ exige $p^2 = 3$, et la seconde $r = \frac{p}{9}$, ce qui est incompatible avec la seconde condition (2).

Problème 34.

S *désignant la fonction*

$$3y(x-y-z) + 4(x-y-z)^2,$$

on considère l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{+1} dz \int_{z-1}^{0} dy \int_{y+z}^{1} \frac{dx}{\sqrt{S}}.$$

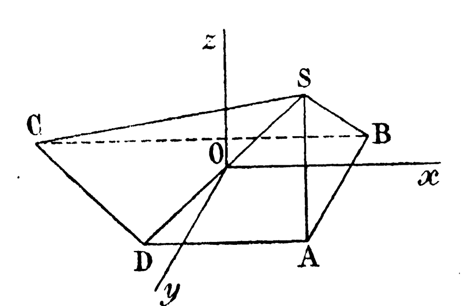
1° *Déterminer le domaine d'intégration parcouru par le point* (x, y, z).

2° *Calculer cette intégrale.* (*Paris, oct.* 1925, *épr. prat.*)

1° Le volume considéré est évidemment limité par les plans

$$z = 1, \qquad z = -1, \qquad y = 0, \qquad y = z - 1, \qquad x = y + z, \qquad x = 1 ;$$

or si l'on prend $z = 1$, on a nécessairement $y = 0$, $x = 1$. Le solide est donc une pyramide quadrangulaire, SABCD, de sommet S(1, 0, 1), ayant sa base ABCD dans le plan $z = -1$, et dont les faces sont définies respectivement par les équations suivantes :



SAB($x = 1$), SBC($y - z + 1 = 0$),
SCD($x - y - z = 0$), SDA($y = 0$).

2° La fonction S est un trinome du second degré en x qui a pour racines

$$x_1 = y + z, \qquad x_2 = \frac{y}{4} + z.$$

et l'on a évidemment dans le domaine d'intégration

$$x_1 < x_2 < 1.$$

Il en résulte que, quand x varie de x_1 à 1, la fonction à intégrer est imaginaire dans l'intervalle (x_1, x_2). Pour conserver un sens au problème proposé, nous calculerons l'expression

$$-i\int_{-1}^{+1} dz \int_{z-1}^{0} dy \int_{y+z}^{\frac{y}{4}+z} \frac{dx}{\sqrt{-S}} + \int_{-1}^{+1} dz \int_{z-1}^{0} dy \int_{\frac{y}{4}+z}^{1} \frac{dx}{\sqrt{S}} = -iI_1 + I_2.$$

La première intégrale triple se calcule aisément; on a en effet

$$\int_{y+z}^{\frac{y}{4}+z} \frac{dx}{\sqrt{-S}} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}}.$$

Posons $$x = x_1 \cos^2 \varphi + x_2 \sin^2 \varphi,$$

d'où $dx = (x_2 - x_1) \sin 2\varphi d\varphi, \qquad (x-x_1)(x_2-x) = (x_2-x_1)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$

nous aurons

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\varphi = \pi, \qquad \text{d'où} \qquad I_1 = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{+1}(1-z)dz = \pi.$$

On a en second lieu

$$\int_{\frac{y}{4}+z}^{1} \frac{dx}{\sqrt{S}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{y}{4}+z}^{1} \frac{d\left[2(x-y-z)+\frac{3}{4}y\right]}{\sqrt{\left[2(x-y-z)+\frac{3}{4}y\right]^2 - \frac{9}{16}y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\log\left[2(x-y-z)+\frac{3}{4}y+\sqrt{S}\right]\right|_{\frac{y}{4}+z}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{8(1-z)-5y+4\sqrt{y^2-5y(1-z)+4(1-z)^2}}{-3y}.$$

Désignons par $U(y, z)$ la fonction sous le signe log; nous aurons maintenant à calculer

$$\frac{1}{2}\int_{z-1}^{0} \log U dy = \frac{1}{2}|y \log U|_{z-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{z-1}^{0} y \frac{dU}{U}.$$

La partie tout intégrée se réduit à $\frac{1-z}{2}\log\frac{13+4\sqrt{10}}{3}$. Faisons dans la dernière intégrale le changement de variable

$$\sqrt{y^2 - 5y(1-z) + 4(1-z)^2} = y + t;$$

nous aurons

$$y = \frac{4(1-z)^2 - t^2}{2t + 5(1-z)}, \qquad U = \frac{3[t + 2(1-z)]}{t - 2(1-z)}, \qquad \frac{dU}{U} = \frac{4(1-z)dt}{4(1-z)^2 - t^2},$$

d'où, en remarquant que t décroît constamment de $(1-z)(\sqrt{10}+1)$ à $2(1-z)$ quand y croît de $z-1$ à zéro,

$$\frac{1}{2}\int_{z-1}^{0} \log U dy = \frac{1-z}{2}\log\frac{13+4\sqrt{10}}{3}$$
$$+ (1-z)\int_{2(1-z)}^{(1-z)(\sqrt{10}+1)} \frac{2dt}{2t+5(1-z)} = \frac{1-z}{2}\log\frac{253+80\sqrt{10}}{27},$$

d'où l'on tire finalement $\qquad I_2 = \log\frac{253+80\sqrt{10}}{27}.$

Problème 35.

Soient Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires,* P *la parabole représentée par le système des deux équations*

$$P(z = 0, \qquad 2x - y^2 = 0),$$

S *la surface représentée par l'équation* $z = f(x, y)$. *On appelle* (C) *la congruence formée des tangentes à la surface* S *qui rencontrent la parabole* P.

1° *Déterminer les développables de cette congruence. Existe-t-il des développables singulières?*

2° *Il existe une famille de ces développables dont les arêtes de rebroussement* (A) *sont situées sur la surface* S. *Former l'équation différentielle* E_1 *des projections de ces courbes* (A) *sur le plan des* xy. *L'équation* E_1 *admet-elle des intégrales singulières?*

3° *Déterminer la fonction* $f(x, y)$ *de façon que parmi les courbes* (A) *se trouvent les sections planes de* S *par des plans parallèles au plan* $y = 0$. *La fonction* f *étant ainsi choisie, montrer qu'on peut déterminer par une quadrature toutes les courbes* (A) *non situées dans des plans parallèles au plan* $y = 0$.

4° *Former la condition* E_2 *à laquelle doit satisfaire la fonction* $f(x, y)$ *pour que la congruence* (C) *soit formée des normales à une surface* Σ.

(*Paris, juin* 1926, *épr. écr.: 1re quest.*)

1° La surface S constitue l'une des nappes focales de la congruence, la parabole P l'autre nappe. Une première famille de développables sera formée de cônes ayant leur sommet sur P et circonscrits à S; leur enveloppe est la développable passant par P et circonscrite à S: elle constitue la développable singulière de la congruence [1]. La seconde famille de développables est formée des développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur S et passant par P.

Analytiquement, le plan tangent à S a pour équation, avec les notations classiques,

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

Soit $\left(\frac{\alpha^2}{2}, \alpha, 0\right)$ un point de P; la courbe de contact du cône ayant son sommet en ce point et circonscrit à S a pour équation sur S

$$p\left(\frac{\alpha^2}{2} - x\right) + q(\alpha - y) + z = 0,$$

et les développables de la première famille sont ainsi déterminées. Pour obtenir la développable singulière, on écrira qu'en tout point de la courbe de contact le plan tangent à S coupe le plan $z = 0$ suivant une tangente à P, ce qui revient à écrire que le système

$$p(X - x) + q(Y - y) + z = 0, \qquad 2X - Y^2 = 0$$

---

(1) II, 152.

a une racine double en (X, Y); on a ainsi pour l'équation de la courbe de contact sur S

$$q^2 - 2p(z - px - qy) = 0.$$

Pour déterminer les développables de la seconde famille, on cherchera les courbes tracées sur S et dont les tangentes rencontrent P. On aperçoit immédiatement des solutions particulières : le plan $z = 0$, les plans tangents à S aux points où elle est coupée par P. Faisons encore une remarque importante ; soit C la courbe intersection de S par le plan $z = 0$; il est clair que toute courbe de S dont les tangentes rencontrent P est nécessairement tangente à C aux points où elle rencontre cette courbe ; ainsi C est, sur S, l'enveloppe des arêtes de rebroussement de la seconde famille de développables de la congruence.

La tangente à une de ces arêtes de rebroussement a pour équations

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{pdx + qdy};$$

elle coupe le plan $Z = 0$ au point

$$X = x - \frac{zdx}{pdx + qdy}, \qquad Y = y - \frac{zdy}{pdx + qdy}.$$

Ecrivant que ce point est sur P on aura, pour l'équation différentielle de ces arêtes de rebroussement,

$$(1) \qquad [y(pdx + qdy) - zdy]^2 - 2(pdx + qdy)[x(pdx + qdy) - zdx] = 0.$$

Cette équation est du second degré en $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire que par tout point de S passent en général deux arêtes de rebroussement : leurs tangentes sont évidemment les droites qui joignent ce point aux deux points où le plan tangent à S coupe P.

2° L'équation (1), où l'on remplace z, p et q par leurs valeurs en fonction de x et y, est en réalité l'équation E_1 des projections des arêtes de rebroussement (A) sur le plan des xy. Elle est de la forme

$$(E_1) \qquad Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = 0,$$

avec $\quad A = p^2(y^2 - 2x) + 2pz, \qquad B = pq(y^2 - 2x) + z(q - py),$

$$C = q^2(y^2 - 2x) - 2qyz + z^2.$$

Les intégrales singulières, s'il en existe, sont définies par l'équation

$$B^2 - AC = 0, \qquad \text{ou} \qquad z^2[2p^2x + 2p(qy - z) + q^2] = 0.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, la courbe $z = 0$ est une intégrale singulière ; le calcul confirme ce résultat, car l'équation E_1 est vérifiée pour

$$z = 0, \qquad pdx + qdy = 0.$$

Quant à la courbe

$$2p^2x + 2p(qy - z) + q^2 = 0,$$

elle ne peut satisfaire à E_1 que si z est intégrale d'une équation aux dérivées

partielles du second ordre que l'on formera aisément. En général, cette courbe sera donc un lieu de points de rebroussement des courbes intégrales de E_1 ; mais pour certaines formes de la surface S elle pourra être, comme C, une intégrale singulière : on vérifiera qu'il en est ainsi, par exemple, pour la surface S définie par l'équation $y^3z - x = 0$.

3° Pour que l'équation E_1 admette la solution $dy = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $A = 0$. Cette condition se décompose en deux autres :

a) $p = 0$; alors on a $z = Y(y)$ et l'équation E_1, débarrassée du facteur dy, s'écrit

$$2YY'\frac{dx}{dy} - 2Y'^2x + (Y'y - Y)^2 = 0.$$

C'est une équation linéaire qui s'intègre aisément et donne

$$x + Y\int\frac{(Y'y - Y)^2}{2Y^2Y'}dy = 0.$$

La surface S est dans ce cas un cylindre dont les génératrices, parallèles à l'axe des x, forment la seconde famille de courbes (A).

b) $p(y^2 - 2x) + 2z = 0$. Cette équation admet pour intégrale générale

$$z = (y^2 - 2x)Y(y) ;$$

la surface S est alors engendrée par une droite qui se déplace parallèlement au plan des xz en coupant constamment P ; ces génératrices rectilignes de S forment d'ailleurs la première famille de courbes (A). La seconde est définie par l'équation

$$2YY'\frac{dx}{dy} + 2Y'^2x - (Y'y + Y)^2 = 0.$$

C'est encore une équation linéaire, dont l'intégrale générale s'écrit

$$xY - \int\frac{(Y'y + Y)^2}{2Y'}dy = 0.$$

4° Soient (x, y, z) un point M de S, $(\xi, \eta, 0)$ un point m d'intersection de P et du plan tangent en M à S ; on a

$$(2) \qquad p(\xi - x) + q(\eta - y) + z = 0, \qquad 2\xi - \eta^2 = 0.$$

La droite Mm est une droite de la congruence, et les deux plans focaux relatifs à cette droite sont d'une part le plan tangent en M à S, d'autre part le plan déterminé par Mm et la tangente mt en m à P. On aura la condition cherchée en écrivant que ces deux plans sont rectangulaires.

La normale en M à S a pour coefficients directeurs $(p, q, -1)$, la droite M$m(x - \xi, y - \eta, z)$, et la droite mt $(\eta, 1, 0)$. Exprimons que ces trois droites sont coplanaires : il vient

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x - \xi & y - \eta & z \\ \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer ξ et η entre les équations (2) et (3), ou η entre les équations

$$p\eta^2+2q\eta+2(z-px-qy)=0, \qquad \eta^2-2\eta(y+qz)+2(x+pz)=0,$$

ce qui donne la condition cherchée

$$[2px+qy+z(p^2-1)]^2 \\ +2[p(y+qz)+q][q(x+pz)+(z-px-qy)(y+qz)]=0.$$

Problème 36.

Soient y_1, y_2 deux intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=f(x)y\,;$$

démontrer que le produit $z=y_1y_2$ vérifie une relation de la forme

$$(2) \qquad 2z\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+4z^2f(x)+\text{A}$$

où A *est constant. Inversement, connaissant deux intégrales particulières distinctes,* Y_1, Y_2 *de l'équation* (1), *en déduire l'intégrale générale de l'équation* (2) *où* A *a une valeur donnée, et vérifier que cette intégrale ne dépend que de deux constantes arbitraires. Indiquer en particulier comment on doit choisir les deux intégrales y_1, y_2, pour que leur produit vérifie des conditions initiales données*

$$z(x_0)=z_0, \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0=z'_0,$$

la fonction $f(x)$ étant holomorphe dans le domaine du point x_0.

Exemple. *Intégrer l'équation différentielle*

$$2z\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-\frac{z^2}{(x+1)^2}+1.$$

(*Paris, juin* 1926, *épr. écr. : 2e quest.*)

Tenant compte des relations

$$(3) \qquad y''_1=f(x)y_1, \qquad y''_2=f(x)y_2,$$

on a successivement

$$z=y_1y_2, \qquad z'=y_1y'_2+y'_1y_2, \qquad z''=2(fz+y'_1y'_2),$$
$$2zz''-z'^2-4z^2f(x)=-(y_1y'_2-y_2y'_1)^2.$$

La quantité entre parenthèses est une constante, car sa dérivée $y_1y''_2-y_2y''_1$ est nulle d'après (3), donc z vérifie bien une équation de la forme (2).

Inversement, d'après le calcul qui précède, on aura une intégrale de l'équation (2) où l'on suppose que A a reçu une valeur numérique déterminée, en

cherchant deux intégrales particulières y_1 et y_2 de l'équation (1) vérifiant la relation

$$(y_1y_2' - y_2y_1')^2 + \mathrm{A} = 0.$$

Soient Y_1 et Y_2 deux intégrales particulières de (1) supposées distinctes ; on peut toujours en multipliant au besoin Y_1 par une constante convenablement choisie, supposer que l'on a

$$(\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2' - \mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_1')^2 + \mathrm{A} = 0.$$

Soit (y_1, y_2) un autre couple d'intégrales particulières distinctes, défini par les équations

$$y_1 = \alpha\mathrm{Y}_1 + \beta\mathrm{Y}_2, \qquad y_2 = \gamma\mathrm{Y}_1 + \delta\mathrm{Y}_2 ;$$

on a

$$y_1y_2' - y_2y_1' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2' - \mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_1') ;$$

si donc les constantes α, β, γ, δ vérifient la relation

$$(4) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1,$$

la fonction $z = y_1y_2$ satisfera à l'équation (2). Il est d'ailleurs facile de voir que z ne dépend que de deux constantes arbitraires ; on a en effet

$$z = (\alpha\mathrm{Y}_1 + \beta\mathrm{Y}_2)(\gamma\mathrm{Y}_1 + \delta\mathrm{Y}_2) = a\mathrm{Y}_1^2 + b\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2 + c\mathrm{Y}_2^2,$$

avec

$$a = \alpha\gamma, \qquad b = \alpha\delta + \beta\gamma, \qquad c = \beta\delta ;$$

la relation (4) s'écrit alors

$$(5) \qquad b^2 - 4ac = 1,$$

et la fonction

$$z = a\mathrm{Y}_1^2 + b\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2 + c\mathrm{Y}_2^2$$

ne dépend que de deux constantes arbitraires, les coefficients a, b et c étant liés par la relation (5).

Cherchons l'intégrale de l'équation (2) qui satisfait aux conditions initiales imposées. Pour cela nous poserons

$$y_1(x_0) = \lambda, \qquad y_2(x_0) = \mu, \qquad y_1'(x_0) = \lambda_1, \qquad y_2'(x_0) = \mu_1,$$

et l'on aura pour déterminer λ, μ, λ_1 et μ_1 les conditions

$$\lambda\mu = z_0, \qquad \lambda\mu_1 + \lambda_1\mu = z_0', \qquad \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = \varepsilon\sqrt{-\mathrm{A}}.$$

Si $z_0 \neq 0$, on prendra par exemple

$$\lambda = 1, \qquad \mu = z_0, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{z_0' - \varepsilon\sqrt{-\mathrm{A}}}{z_0}, \qquad \mu_1 = \frac{1}{2}(z_0' + \varepsilon\sqrt{-\mathrm{A}})$$

Si $z_0 = 0$, on aura par exemple, d'après (2),

$$z_0' = \varepsilon\sqrt{-\mathrm{A}} ;$$

on pourra prendre

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 0, \qquad \mu_1 = z_0', \qquad \lambda_1 \text{ arbitraire.}$$

L'équation en y associée à l'équation

$$(6) \qquad 2zz'' = z'^2 - \frac{z^2}{(x+1)^2} + 1$$

s'écrit

$$4(x+1)^2y'' + y = 0.$$

Cherchant une solution de la forme $y_1 = (x+1)^\lambda$, on trouve d'abord $y_1 = (x+1)^{\frac{1}{2}}$; le changement de variable $y = y_1 u$ donne ensuite

$$u = a \operatorname{Log}(x+1) + b.$$

On en déduit les intégrales particulières

$$y_1 = (x+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2 = (x+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Log}(x+1),$$

et la méthode précédente permet alors d'en déduire l'intégrale générale de (6). On trouve finalement

$$z = (x+1)\left[a + b \operatorname{Log}(x+1) + c \operatorname{Log}^2(x+1)\right]$$

avec $$b^2 - 4ac = -1.$$

Problème 37.

Intégrer l'équation

$$\frac{p^2}{x^2} + \frac{q^2}{y^2} - \frac{2}{z^2} = 0$$

où x et y sont les variables indépendantes, z une fonction inconnue de x et de y, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Montrer que toute surface intégrale S *contient une caractéristique* L *située sur une sphère ayant son centre à l'origine.*

1° *Trouver la surface intégrale* S_0 *passant par la droite $y = 0$, $x = z + 1$.*

2° *Calculer avec une erreur relative inférieure à* 0,02 *la longueur de la ligne* L *située sur* S_0.

(*Paris, juin* 1926, *épr. prat.*)

On aura évidemment une intégrale complète en posant

$$\frac{p}{x} = \frac{\sqrt{2}}{z}\cos\alpha, \qquad \frac{q}{y} = \frac{\sqrt{2}}{z}\sin\alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. On tire en effet de ces relations

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{\sqrt{2}}{z}(x\cos\alpha\,dx + y\sin\alpha\,dy),$$

d'où l'intégrale complète

$$z^2 = \sqrt{2}\,(x^2\cos\alpha + y^2\sin\alpha + \beta),$$

formée de quadriques ayant leur centre à l'origine.

L'intégrale générale sera le résultat de l'élimination de α entre les équations

$$x^2\cos\alpha + y^2\sin\alpha - \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \beta(\alpha) = 0,$$

$$-x^2\sin\alpha + y^2\cos\alpha + \beta'(\alpha) = 0,$$

$\beta(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire de α ; à chaque valeur de α les équations précédentes font correspondre une courbe caractéristique.

On peut encore, en introduisant un nouveau paramètre u, représenter la surface intégrale la plus générale par les équations

(1) $x^2 = u\cos\alpha + \beta'(\alpha)\sin\alpha, \qquad y^2 = u\sin\alpha - \beta'(\alpha)\cos\alpha, \qquad z^2 = \sqrt{2}\,[u + \beta(\alpha)],$

où $\beta(\alpha)$ désigne toujours une fonction arbitraire de α.

L'intersection de cette surface par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

est définie par l'équation

$$R^2 = u(\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{2}) + \beta\sqrt{2} + \beta'(\sin\alpha - \cos\alpha);$$

pour que cette équation représente une caractéristique $\alpha = C^{te}$, il faut et il suffit que

$$\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{2} = 0,$$

ce qui exige $\qquad \cos\alpha = \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad$ ou $\qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}.$

Donc la sphère $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}\,\beta\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

coupe la surface (1) suivant la caractéristique $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, l'intersection complète pouvant, bien entendu, comprendre d'autres courbes.

1° Pour résoudre le problème de Cauchy relatif à la droite

$$y = 0, \qquad x = z + 1,$$

nous remplaçons suivant la méthode classique [1] x et y par leurs valeurs ci-dessus dans l'équation de l'intégrale complète, ce qui donne

$$\sqrt{2}\left[(z+1)^2\cos\alpha + \beta\right] - z^2 = 0.$$

Dérivons par rapport à z,

$$\sqrt{2}(z+1)\cos\alpha - z = 0,$$

et éliminons z entre les deux dernières équations; on trouve

$$\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha - 1}.$$

Remplaçant β par cette valeur dans les équations (1), on obtient les équations paramétriques de la surface cherchée,

$$x^2 = u\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{(\sqrt{2}\cos\alpha - 1)^2}, \qquad y^2 = u\sin\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(\sqrt{2}\cos\alpha - 1)^2},$$
$$z^2 = \sqrt{2}\left(u + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha - 1}\right)$$

2° Sur cette surface la caractéristique $L\left(\alpha = \frac{5\pi}{4}\right)$ est représentée par les équations

$$x^2 = \frac{1}{8} - \frac{u}{\sqrt{2}}, \qquad y^2 = -\frac{1}{8} - \frac{u}{\sqrt{2}}, \qquad z^2 = u\sqrt{2} + \frac{1}{2},$$

[1] II, 242.

qui s'écrivent, si l'on pose $u = -v\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$$x^2 = \frac{v+1}{8}, \qquad y^2 = \frac{v-1}{8}, \qquad z^2 = \frac{2-v}{4}.$$

La portion réelle de la courbe correspond aux valeurs de v comprises entre 1 et 2 ; elle est formée de l'arc Γ

$$x = +\frac{\sqrt{v+1}}{2\sqrt{2}}, \qquad y = +\frac{\sqrt{v-1}}{2\sqrt{2}}, \qquad z = +\frac{\sqrt{2-v}}{2},$$

et des sept arcs qu'on en déduit par symétrie relativement aux trois plans de coordonnées, aux trois axes et à l'origine.

Nous allons calculer la longueur l de l'arc Γ avec une erreur relative inférieure à 0,02. On a d'abord

$$ds^2 = \frac{(2v-1)dv^2}{16(v^2-1)(2-v)},$$

d'où

$$l = \frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{\frac{2v-1}{(v^2-1)(2-v)}}\,dv,$$

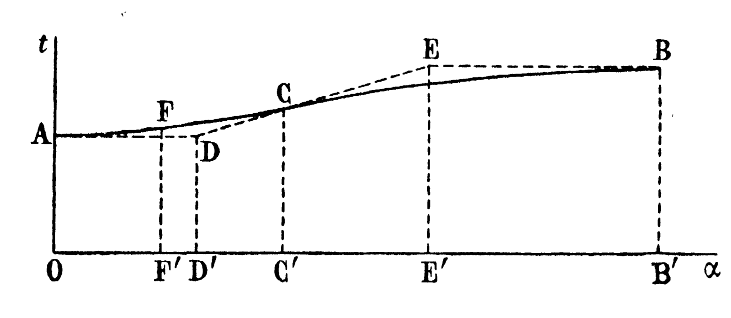
ce qu'on peut encore écrire, en faisant le changement de variable

$$v = \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad l = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sqrt{\frac{2(2-\cos\alpha)}{5-\cos\alpha}}\,d\alpha.$$

Construisons la courbe représentée dans le plan (t, α) par l'équation

$$t = \sqrt{\frac{2(2-\cos\alpha)}{5-\cos\alpha}}.$$

pour $0 < \alpha < \pi$. On voit que t est minimum pour $\alpha = 0$, et croît constamment jusqu'à un maximum atteint pour $\alpha = \pi$. La courbe présente un point d'inflexion pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On a finalement le tracé ci-contre, et il s'agit d'évaluer l'aire limitée par l'arc AB, les ordonnées de ses extrémités et le segment OB′ de l'axe des α.



On a $OA = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $B'B = 1$, d'où $l > \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, et par suite, en désignant par Δl l'erreur absolue commise sur l, $\frac{\Delta l}{l} < \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\Delta l$; il suffira donc de prendre $\Delta l < \frac{\pi\sqrt{2}}{400}$, ou $\Delta l < \frac{11}{1\,000}$, pour avoir l'approximation demandée.

Soient C le point d'inflexion, D et E les points où la tangente en C coupe respectivement les tangentes en A et B, C′, D′ et E′ les projections de ces points sur

l'axe des α. La tangente en C, qui a pour équation

$$t-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{9}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right),$$

coupe la tangente en A au point D de coordonnées

$$\frac{\pi}{3}-\frac{9(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}},\qquad \frac{\sqrt{2}}{2};$$

on a donc, en désignant par S_1 et S_2 les aires OACC′ et C′CBB′,

$$S_1>S_e(\text{OADD}')+S_e(\text{D}'\text{DCC}')=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{9(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right]+\frac{9(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0,77427.$$

Pour avoir une limite supérieure de S_1, nous marquerons sur la courbe le point F d'abscisse $\frac{\pi}{6}$, et nous calculerons la somme des aires des trapèzes rectilignes OAFF′ et F′FCC′; on a ainsi

$$S_1<\frac{\pi}{12}(OA+2F'F+C'C)<\frac{\pi\sqrt{2}}{12}(0,5+1,0475+0,57735)<0,78716.$$

On peut donc prendre $$\frac{S_1}{4}=0,19,$$

avec une erreur absolue *par défaut* inférieure à $\frac{7}{1\,000}$.

Nous aurons maintenant, pour les coordonnées du point E où la tangente en B coupe la tangente en C,

$$\frac{\pi}{3}+9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\qquad 1.$$

Par suite, on peut écrire

$$S_2<S_e(\text{C}'\text{CEE}')+S_e(\text{E}'\text{EBB}')=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{2\pi}{3}-9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<1,98873.$$

Pour avoir une limite inférieure de S_2, nous calculerons, comme précédemment, la somme des aires des trapèzes rectilignes ayant pour hauteur commune $\frac{\pi}{3}$ et pour bases respectives

$$t_1=t\left(\frac{\pi}{3}\right),\qquad t_2=t\left(\frac{2\pi}{3}\right),\qquad t_3=t(\pi),$$

ce qui donne $$S_2>\frac{\pi}{6}(t_1+2t_2+t_3)>1,94704;$$

on peut donc prendre $$\frac{S_2}{4}=0,4972,$$

avec une erreur absolue *par excès* inférieure à $\frac{11}{1\,000}$.

On aura donc en définitive $l=\frac{S_1+S_2}{4}=0,6872$, avec une erreur absolue inférieure à $\frac{11}{1\,000}$, et par suite une erreur relative inférieure à $\frac{2}{100}$

Problème 38.

Les axes Ox, Oy, Oz *étant supposés rectangulaires, soient* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *trois fonctions données des variables* x, y, z *;* S *une surface représentée par une équation*

$$z = f(x, y). \tag{E}$$

1° *On demande de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces* S *telles que l'aire d'une portion quelconque* Σ *de* S, *limitée par un seul contour fermé* Γ, *soit égale à l'intégrale curviligne*

$$\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

prise le long de Γ *dans un sens convenable, et de former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction* $f(x, y)$.

2° *Intégrer cette équation dans le cas particulier où l'on a*

$$P = xz, \qquad Q = yz, \qquad R = 0.$$

3° *Démontrer que, dans ce cas particulier, il existe une infinité de surfaces* S, *dépendant de deux constantes arbitraires, qui sont des surfaces développables, et indiquer la nature de l'arête de rebroussement de ces surfaces.*

(*Paris, oct.* 1926, *épr. écr.: 1re quest.*)

1° D'après la formule de Stokes l'intégrale curviligne peut s'écrire

$$\iint \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\sigma,$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à S, $d\sigma$ l'élément d'aire sur S. Pour que cette intégrale soit égale à $\iint d\sigma$ sur toute portion de S, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1 ;$$

remplaçant α, β, γ par $\frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, $\frac{\varepsilon q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ respectivement, on aura, pour l'équation aux dérivées partielles des surfaces S,

$$p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \varepsilon\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

2° Dans le cas particulier considéré, cette équation se réduit à

$$-py + qx = \varepsilon\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{1}$$

Pour l'intégrer, nous lui appliquerons la transformation de Legendre (1), qui la ramène à une équation linéaire

$$\text{(2)} \qquad PY - QX = \varepsilon\sqrt{1 + X^2 + Y^2}.$$

Passons aux coordonnées semi-polaires

$$X = \rho \cos\varphi, \qquad Y = \rho \sin\varphi;$$

on aura

$$dZ = P_1 d\rho + Q_1 d\varphi = P(\cos\varphi d\rho - \rho \sin\varphi d\varphi) + Q(\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi),$$

d'où l'on tire successivement

$$PY - QX = -Q_1, \qquad Q_1 + \varepsilon\sqrt{1 + \rho^2} = 0, \qquad Z = F(\rho) - \varepsilon\varphi\sqrt{1 + \rho^2},$$

$F(\rho)$ désignant une fonction arbitraire.

On a ensuite

$$P = P_1 \cos\varphi - \frac{Q_1}{\rho}\sin\varphi = \left[F'(\rho) - \varepsilon\varphi\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]\cos\varphi + \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\sin\varphi,$$

$$Q = P_1 \sin\varphi + \frac{Q_1}{\rho}\cos\varphi = \left[F'(\rho) - \varepsilon\varphi\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]\sin\varphi - \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\cos\varphi,$$

$$PX + QY - Z = \rho F'(\rho) - F(\rho) + \frac{\varepsilon\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}};$$

en coordonnées paramétriques ρ et φ, les équations de la surface intégrale générale de (1) s'écrivent donc

$$x = \left[F'(\rho) - \varepsilon\varphi\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]\cos\varphi + \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\sin\varphi,$$

$$y = \left[F'(\rho) - \varepsilon\varphi\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]\sin\varphi - \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\cos\varphi,$$

$$z = \rho F'(\rho) - F(\rho) + \frac{\varepsilon\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}},$$

$F(\rho)$ désignant une fonction arbitraire.

3° Aux multiplicités intégrales ayant pour supports ponctuels les courbes caractéristiques de l'équation (2) correspondent des surfaces intégrales de (1) qui sont des développables (2). Il existe donc bien une intégrale complète de (1) formée de développables : nous allons cette fois la déterminer directement à partir de l'équation (1) elle-même.

En utilisant les résultats précédents, on tire du système différentiel des caractéristiques la combinaison intégrable

$$p\,dp + q\,dq = 0,$$

qui permet d'écrire

$$p = \rho\cos\varphi, \qquad q = \rho\sin\varphi,$$

(1) II, 176.
(2) II, n° 272.

ρ désignant une constante. On a alors

$$dz = \rho(\cos\varphi dx + \sin\varphi dy) = \rho d(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - \rho(y\cos\varphi - x\sin\varphi)d\varphi,$$

ou encore, puisque, d'après (1), $\rho(y\cos\varphi - x\sin\varphi) = -\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}$,

$$dz = \rho d(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \varepsilon\sqrt{1+\rho^2}\,d\varphi,$$

et finalement

$$(3) \qquad z = \rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \varepsilon\varphi\sqrt{1+\rho^2} + \sigma,$$

σ désignant une constante arbitraire. Les surfaces développables cherchées sont donc définies par l'équation (3) jointe à l'équation

$$\rho(y\cos\varphi - x\sin\varphi) + \varepsilon\sqrt{1+\rho^2} = 0.$$

Posons $x = u\cos v$, $y = u\sin v$; on tire de la dernière équation

$$u = \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}}{\sin(\varphi - v)},$$

et on obtient, en coordonnées paramétriques v et φ, les équations des développables,

$$x = \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}\cos v}{\sin(\varphi - v)}, \quad y = \frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho^2}\sin v}{\sin(\varphi - v)}, \quad z = \varepsilon\sqrt{1+\rho^2}\left[\operatorname{cotg}(\varphi - v) + \varphi\right] + \sigma,$$

où ρ et σ sont les constantes de l'intégrale complète.

La relation $p^2 + q^2 = C^{te}$ montre d'ailleurs que pour chacune de ces développables le plan tangent fait un angle constant avec l'axe Oz. Comme ce plan est osculateur à l'arête de rebroussement, il en résulte que celle-ci est une hélice.

Problème 39.

Soit

$$F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$, pour laquelle on a l'identité

$$\overline{dP}^2 + \overline{dQ}^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2).$$

Démontrer que la fonction $\lambda(x, y)$ satisfait à la relation

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial y^2} = 0,$$

soit par un calcul direct, soit en la déduisant des propriétés des fonctions analytiques.

Application. — *Trouver les fonctions $F'(z)$ et $F(z)$, sachant que $\lambda(x, y)$ est le produit d'une fonction de x par une fonction de y.*

(*Paris, oct.* 1926, *épr. écr. :* 2ᵉ *quest.*)

Tenant compte des relations

(1) $$P_x = Q_y, \qquad P_y = -Q_x, \qquad P_{x^2} + P_{y^2} = 0,$$

on a successivement $$\lambda^2 = P_x^2 + P_y^2,$$

(2) $$\lambda\lambda_x = P_x P_{x^2} + P_y P_{xy}, \qquad \lambda\lambda_y = -P_y P_{x^2} + P_x P_{xy},$$

(3) $$\lambda_x^2 + \lambda\lambda_{x^2} = P_{x^2}^2 + P_{xy}^2 + P_x P_{x^3} + P_y P_{x^2y},$$
$$\lambda_y^2 + \lambda\lambda_{y^2} = P_{x^2}^2 + P_{xy}^2 - P_y P_{x^2y} + P_x P_{xy^2}.$$

D'autre part on a aussi

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial y^2} = \frac{\lambda(\lambda_{x^2} + \lambda_{y^2}) - \lambda_x^2 - \lambda_y^2}{\lambda^2};$$

or on tire de (2)

$$\lambda^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2) = (P_x^2 + P_y^2)(P_{x^2}^2 + P_{xy}^2) = \lambda^2(P_{x^2}^2 + P_{xy}^2),$$

donc $$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = P_{x^2}^2 + P_{xy}^2,$$

et de (3)

$$\lambda(\lambda_{x^2} + \lambda_{y^2}) - \lambda_x^2 - \lambda_y^2 = 2(P_x^2 + P_{xy}^2 - \lambda_x^2 - \lambda_y^2) + P_x(P_{x^3} + P_{xy^2}) = P_x(P_{x^3} + P_{xy^2}).$$

La dernière parenthèse est nulle, comme on le voit en dérivant par rapport à x la troisième relation (1); on a donc bien

(4) $$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial y^2} = 0.$$

On peut aussi établir ce résultat sans calcul en faisant appel aux propriétés des fonctions analytiques. La relation

$$\overline{dP}^2 + \overline{dQ}^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$$

donne en effet $$\lambda = |F'(z)|.$$

Posons alors $F'(z) = \lambda e^{i\varphi}$, d'où $\operatorname{Log} F'(z) = \log \lambda + i\varphi$;

comme $\operatorname{Log} F'(z)$ est une fonction analytique, $\log \lambda$ et φ sont deux fonctions harmoniques associées.

Supposons maintenant que λ soit le produit d'une fonction de x par une fonction de y; on peut écrire

$$\lambda = e^{X+Y}, \qquad \log \lambda = X + Y,$$

et la relation (4) entraîne

$$X'' + Y'' = 0, \qquad X'' = 2a, \qquad Y'' = -2a,$$
$$X = ax^2 + bx + c, \qquad Y = -ay^2 + b'y + c'.$$

On a d'ailleurs $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -Y', \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = X',$$

d'où $$\varphi = 2axy - b'x + by,$$

et par suite

$$F'(z) = ke^{a(x^2-y^2) + bx + b'y + i(2axy - b'x + by)} = ke^{az^2 + a'z} \quad (a' = b - ib').$$

On aura ensuite $F(z)$ par une quadrature,

$$F(z) = k\int e^{az^2 + a'z}\,dz$$

Problème 40.

On donne l'équation différentielle

(1) $$2xy'' - y' - 2y = 0,$$

où x désigne la variable indépendante et y la fonction; y' et y'' sont les dérivées première et seconde de y.

Montrer qu'il est possible de trouver une fonction $A(z)$ et un chemin L dans le plan complexe de z de façon que

$$y = \int_L A(z)e^{zx}dz$$

soit une solution de (1). On fixera A par la condition $A(1) = e$, base des logarithmes népériens.

1° Quelle condition doit vérifier x (réel ou complexe) pour que le demi-axe réel négatif soit un chemin L?

Calculer dans ce dernier cas, pour $x = 0$, la valeur de y, au signe près, et avec une erreur relative inférieure à 0,01.

2° Montrer que, quel que soit x, on peut choisir pour L un contour fermé simple, possédant à l'origine un point anguleux, et que l'on achèvera de caractériser.

(*Paris, oct.* 1926, *épr. prat.*)

On a successivement

$$y = \int_L Ae^{zx}dz, \qquad y' = \int_L Axe^{zx}dz, \qquad y'' = \int_L Ax^2e^{zx}dz\,;$$

portant ces valeurs dans l'équation (1), on a ensuite

(2) $$\int_L (2xz^2 - z - 2)Ae^{zx}dz = 0.$$

Suivant la méthode classique [1], cherchons à déterminer A de telle sorte que l'expression sous le signe $\int$ soit la différentielle d'une fonction de la forme $u(z)e^{zx}$; on devra avoir

$$\left(\frac{du}{dz} + ux\right)e^{zx} \equiv (2xz^2 - z - 2)Ae^{zx},$$

ou $$\frac{du}{dz} = -A(z+2), \qquad u = 2Az^2,$$

et par suite, en éliminant u,

$$2z^2\frac{dA}{dz} + A(5z+2) = 0.$$

---

[1] II, 44.

On en déduit, pour la fonction $A(z)$ telle que $A(1) = e$, l'expression $A = z^{-\frac{5}{2}} e^{\frac{1}{z}}$, et par suite

$$(3) \qquad y = \int_L z^{-\frac{5}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}} dz;$$

en même temps on a $u = 2Az^2 = 2z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{z}}$, et l'équation (2), qui est équivalente à (1), se réduit à la forme simple

$$\left| z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}} \right|_L = 0.$$

En définitive, à chaque chemin L tel que l'expression $z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}}$ prenne la même valeur à ses deux extrémités, la formule (3) fait correspondre une intégrale particulière de (1), pourvu toutefois que la fonction y ainsi déterminée soit finie et non nulle.

1° Le point z étant sur le demi-axe réel négatif, posons

$$z = \rho e^{i\pi}, \qquad \text{d'où} \qquad z^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{et} \qquad x = Re^{i\omega}.$$

Nous aurons alors

$$z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}} = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-\rho R(\cos\omega + i \sin\omega) - \frac{1}{\rho}},$$

et par suite

$$\left| z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}} \right| = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho R \cos\omega - \frac{1}{\rho}}.$$

Quand ρ tend vers zéro par valeurs positives, on a donc

$$\lim \left| z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}} \right| = \lim \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\rho}} = 0;$$

par suite le demi-axe réel négatif est un chemin L si le module de $z^{-\frac{1}{2}} e^{zx + \frac{1}{z}}$ tend vers zéro quand ρ croît indéfiniment. Dans cette hypothèse la limite du module est évidemment la même que celle de $\rho^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho R \cos\omega}$; pour que cette expression tende vers zéro avec $\frac{1}{\rho}$, il faut et il suffit que le coefficient de ρ dans l'exponentielle ne soit pas positif, donc que $\cos\omega \geqslant 0$. La condition cherchée est donc que la partie réelle de x soit positive ou nulle.

Prenons en particulier $x = 0$; on aura

$$z^{-\frac{5}{2}} = \rho^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{5\pi}{2}} = -i\rho^{-\frac{5}{2}}, \qquad y = i\int_0^\infty \rho^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{\rho}} d\rho,$$

ou, en posant $\rho = \frac{1}{v}$,

$$y = i\int_0^\infty v^{\frac{1}{2}} e^{-v} dv = i\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{i}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} = i \,.\, 0{,}886\ldots$$

2° Posons $z = \rho e^{i\theta}$, et faisons tendre ρ vers zéro, θ tendant vers une limite bien déterminée θ_0. On a, en prenant toujours $x = \mathrm{R}e^{i\omega}$,

$$z^{-\frac{1}{2}} e^{zx+\frac{1}{z}} = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\mathrm{R}(\cos\omega + i\sin\omega) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)},$$

et par suite $$\left| z^{-\frac{1}{2}} e^{zx+\frac{1}{z}} \right| = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\rho\mathrm{R}\cos(\theta+\omega) + \frac{1}{\rho}\cos\theta};$$

quand ρ et θ tendent respectivement vers zéro et θ_0, cette dernière expression est de l'ordre de grandeur de $\rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\rho}\cos\theta_0}$, et elle tend vers zéro pourvu que $\cos\theta_0 < 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$. Si donc on considère un contour fermé présentant à l'origine un point anguleux tel que les demi-tangentes au contour en ce point dans le demi-plan $x < 0$ fassent avec le demi-axe réel positif des angles compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la variation totale de $z^{-\frac{1}{2}} e^{xz+\frac{1}{z}}$ le long de ce contour est nulle. Un calcul analogue à celui qui précède montre que, dans l'intégrale qui fait connaître y, la fonction à intégrer tend vers zéro quand on se rapproche de l'origine en suivant le contour : donc y reste borné, et comme la fonction à intégrer n'est pas holomorphe à l'origine, la valeur obtenue pour y sera différente de zéro pourvu que l'on puisse, en déformant infiniment peu au voisinage de l'origine le contour considéré, le transformer en un contour fermé entourant l'origine, l'argument de z sur l'arc infiniment voisin de l'origine restant toujours compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, ou encore, plus simplement, pourvu que les points du demi-axe réel positif infiniment voisins de l'origine soient intérieurs au contour considéré.

Problème 41.

I. *Déterminer les coordonnées x, y, z d'un point variable d'une courbe gauche* C *par rapport à un trièdre trirectangle d'origine* O, *sachant que :*

1° O *est un point de la courbe* C*;*

2° *L'arc s de la courbe* C, *supposée orientée, étant compté à partir de* O, *les rayons de courbure et de torsion au point* M *de* C *d'abscisse curviligne s sont tous deux égaux à $s\sqrt{2}$;*

3° *Au point* M_0 *de* C *dont l'abscisse curviligne est $s_0 = 1$, la tangente, la normale principale et la binormale ont les cosinus directeurs suivants :*

Tangente	$\frac{1}{\sqrt{2}}$,	0,	$\frac{1}{\sqrt{2}}$;
Normale principale	0,	-1,	0;
Binormale	$\frac{1}{\sqrt{2}}$,	0,	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

II. *Montrer que* C *est situé sur un cône de révolution* ($\mathcal{C}$) *de sommet* O, *et que* O *est un point singulier de* C. *Déterminer la nature géométrique de la projection*

de C *sur le plan des* xy. *Montrer que* C *coupe sous un angle constant les génératrices de* ($\mathcal{C}$). *Déterminer les indicatrices des tangentes, des normales principales et des binormales de* C. *Montrer que* C *coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette orthogonalement sur le plan* xOy.

III. *Déterminer le rayon et les coordonnées du centre* ω *de la sphère osculatrice à* C *en* M. *Le lieu* Γ *de* ω *possède-t-il des propriétés analogues à celles de* C?

(*Paris, juin* 1927, *épr. écr. : 1*[re] *quest.*)

I. Nous désignerons par **X, Y, Z** les vecteurs unitaires des axes de coordonnées, par ***t, n, b*** les vecteurs unitaires de la tangente, de la normale principale et de la binormale à C suivant les notations usuelles.

Les formules de Frenet [1] s'écrivent ici

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{s\sqrt{2}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}}{s\sqrt{2}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{s\sqrt{2}}.$$

La première et la troisième donnent immédiatement, compte tenu des conditions aux limites,

$$\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b}=\mathbf{Z}\sqrt{2}.$$

On tire ensuite des deux premières

$$s\sqrt{2}\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}+\sqrt{2}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{2\boldsymbol{t}-\mathbf{Z}\sqrt{2}}{s\sqrt{2}}.$$

ou

(1) $$s^2\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}+s\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{2}};$$

c'est une équation linéaire avec second membre, qui admet la solution particulière $\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{2}}$. Pour intégrer l'équation sans second membre

$$s^2\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}+s\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\boldsymbol{t}=0,$$

qui est une équation d'Euler, nous poserons, suivant la méthode classique, $s=e^u$, remarquant que pour $s=0$ on aura $u=-\infty$. L'équation précédente devient

$$\frac{d^2\boldsymbol{t}}{du^2}+\boldsymbol{t}=0,$$

et l'on a finalement, pour l'intégrale de (1),

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\alpha}\cos u+\boldsymbol{\beta}\sin u+\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{2}},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ désignant des vecteurs constants arbitraires. On en tire alors

$$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{\alpha}\sqrt{2}\sin u+\boldsymbol{\beta}\sqrt{2}\cos u,$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}\cos u+\boldsymbol{\beta}\sin u-\frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{2}}.$$

---

[1] II, 75.

Observant que pour $s = s_0 = 1$ on a $u = 0$, et appliquant les conditions aux limites, on trouve

$$\alpha = \frac{X}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = -\frac{Y}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$t = \frac{X}{\sqrt{2}} \cos u - \frac{Y}{\sqrt{2}} \sin u + \frac{Z}{\sqrt{2}}$$

La relation $t \cdot Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ montre que la courbe C est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz et coupent la courbe sous un angle de 45°.

On a ensuite

$$\frac{dM}{du} = te^u = \frac{X}{\sqrt{2}} e^u \cos u - \frac{Y}{\sqrt{2}} e^u \sin u + \frac{Z}{\sqrt{2}} e^u,$$

d'où, en tenant compte des relations

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\sin u + \cos u), \qquad \int e^u \sin u du = \frac{e^u}{2}(\sin u - \cos u),$$

$$(2) \qquad M = \frac{e^u}{2\sqrt{2}}\left[X(\cos u + \sin u) + Y(\cos u - \sin u) + 2Z\right],$$

sans ajouter de constante puisque pour $u = -\infty$ le point M doit être en O. On a donc en définitive, pour les coordonnées (x, y, z) d'un point M de C,

$$x = \frac{e^u}{2\sqrt{2}}(\cos u + \sin u), \qquad y = \frac{e^u}{2\sqrt{2}}(\cos u - \sin u), \qquad z = \frac{e^u}{\sqrt{2}}.$$

II. Nous avons en tout point M de C

$$(3) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{X}{\sqrt{2}} \cos u - \dfrac{Y}{\sqrt{2}} \sin u + \dfrac{Z}{\sqrt{2}}, \\ n = -X \sin u - Y \cos u, \\ b = \dfrac{X}{\sqrt{2}} \cos u - \dfrac{Y}{\sqrt{2}} \sin u - \dfrac{Z}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

et d'autre part, d'après (2),

$$\overline{OM}^2 = \frac{3e^{2u}}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad OM = \frac{e^u\sqrt{3}}{2}.$$

La relation $M \cdot Z = \frac{e^u}{\sqrt{2}} = OM\sqrt{\frac{2}{3}}$ montre que la droite OM fait avec Oz un angle constant V tel que $\cos V = \sqrt{\frac{2}{3}}$; donc C est sur un cône de révolution d'axe Oz. La relation $M \cdot t = \frac{3e^u}{4} = OM\frac{\sqrt{3}}{2}$ montre d'ailleurs que C coupe les génératrices de ce cône sous un angle de 30°

Soit m la projection de M sur le plan $x\mathrm{O}y$; on a

$$m = \frac{e^u}{2\sqrt{2}}[\mathbf{X}(\cos u + \sin u) + \mathbf{Y}(\cos u - \sin u)],$$

d'où

$$\overline{\mathrm{O}m}^2 = \frac{e^{2u}}{4}, \qquad \mathrm{O}m = \frac{e^u}{2}.$$

La tangente en M à C se projette sur le plan $x\mathrm{O}y$ suivant la tangente en m au lieu de m ; on a donc, pour le vecteur unitaire t_1 de cette dernière tangente,

$$t_1 = \mathbf{X}\cos u - \mathbf{Y}\sin u,$$

d'où

$$m \cdot t_1 = \frac{e^u}{2\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{O}m}{\sqrt{2}},$$

ce qui montre que le rayon vecteur Om coupe le lieu de m sous un angle de 45°. Le lieu de m est donc une spirale logarithmique de pôle O, et, par suite, le point O est un point asymptote de C.

Les équations (3) définissent les indicatrices des tangentes, des normales principales et des binormales. Il est visible que ces courbes sont les trois cercles intersections de la sphère de centre O et de rayon *un* par les plans

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z = 0, \qquad z = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

respectivement.

Enfin nous avons déjà fait observer que C coupe sous un angle de 45° les génératrices du cylindre qui la projette parallèlement à Oz.

III. Le point ω, centre de la sphère osculatrice en M, est défini par l'équation vectorielle

$$\omega = \mathbf{M} + \mathrm{R}n - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{R}}{ds}b, \tag{4}$$

R et T désignant les rayons de courbure et de torsion en M, $\mathrm{R} = \mathrm{T} = s\sqrt{2}$. On tire de (2) et (3)

$$\omega = \frac{e^u}{2\sqrt{2}}[-3\mathbf{X}(\cos u + \sin u) - 3\mathbf{Y}(\cos u - \sin u) + 6\mathbf{Z}]. \tag{5}$$

On déduit de (4)

$$\overline{\omega\mathrm{M}}^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2 = 6s^2, \qquad \omega\mathrm{M} = s\sqrt{6}.$$

Soit d'autre part M_1 le symétrique de M par rapport à l'axe Oz. On tire de (5)

$$\omega = 3\mathbf{M}_1,$$

et on en déduit que le lieu de ω possède toutes les propriétés de C qui se conservent dans une homothétie de centre O suivie d'une symétrie par rapport à Oz, ce qui est précisément le cas des propriétés établies au paragraphe précédent.

Problème 42.

1° *Étant données les deux équations différentielles du premier ordre*

$$(E_1) \qquad dy - f(x, y)dx = 0, \qquad\qquad (E_2) \qquad dx + f(x, y)dy = 0,$$

on demande à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ *pour que les premiers membres des deux équations* (E_1), (E_2) *admettent un facteur intégrant commun* $\mu(x, y)$.

2° *Si cette condition est satisfaite, il existe une fonction analytique*

$$F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$, *telle que les deux équations*

$$P(x, y) = C, \qquad Q(x, y) = C'$$

représentent respectivement les intégrales générales des équations (E_1), (E_2).

3° *Il existe aussi une fonction analytique* $F_1(z)$ *dont la partie réelle est* $\operatorname{arc\,tg}\left[f(x, y)\right]$. *Quelle est la relation entre ces deux fonctions analytiques?*

4° *Déterminer ces deux fonctions* $F(z)$, $F_1(z)$ *sachant que* $f(x, y)$ *ne dépend que de la somme* $x + y$ *et satisfait aux deux conditions*

$$f = 0, \qquad f'_x = 1, \qquad \textit{pour} \qquad x = y = 0.$$

(Paris, juin 1927, épr. écr.: 2ᵉ quest.)

1° Soient $P(x, y) = C$, $Q(x, y) = C'$ les intégrales générales des équations (E_1) et (E_2) respectivement. Supposons que l'on puisse prendre P et Q de telle sorte que l'on ait

$$dP \equiv \mu(dy - fdx), \qquad dQ \equiv -\mu(dx + fdy),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = -\mu f = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Il en résulte que $P(x, y) + iQ(x, y)$ est une fonction analytique; les courbes intégrales de (E_1) et (E_2) forment donc alors un réseau d'isothermes [1].

Posons $\log \mu = u(x, y)$, et écrivons que μ est un facteur intégrant pour les équations (E_1) et (E_2); nous aurons

$$u_x + fu_y + f_y = 0, \qquad fu_x - u_y + f_x = 0,$$

d'où

$$u_x(1 + f^2) + ff_x + f_y = u_y(1 + f^2) + ff_y - f_x = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \log\sqrt{1 + f^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{arc\,tg} f) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(u + \log\sqrt{1 + f^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{arc\,tg} f) = 0. \end{aligned} \right.$$

La condition cherchée est donc que $\operatorname{arc\,tg} f$ soit une fonction harmonique.

---

(1) I, 146.

2° et 3° Nous avons déjà vu que $P(x, y) + iQ(x, y)$ est une fonction analytique $F(z)$. D'autre part les relations (1) montrent qu'il existe une autre fonction analytique $F_1(z)$ admettant arc tg f pour partie réelle,

$$F_1(z) = \operatorname{arc\,tg} f + i \log \mu\sqrt{1+f^2}.$$

Posons $\operatorname{arc\,tg} f = \varphi$, $\quad \mu\sqrt{1+f^2} = \rho$, $\quad$ d'où $\quad \mu = \rho\cos\varphi$.

On pourra écrire

$$F_1(z) = i(\log\rho - i\varphi) = i\,\mathrm{Log}\,\rho e^{-i\varphi}.$$

D'autre part on a

$$P_x = -\mu f = -\rho\sin\varphi, \qquad P_y = \mu = \rho\cos\varphi,$$
$$F'(z) = P_x - iP_y = -\rho(\sin\varphi + i\cos\varphi) = -i\rho e^{-i\varphi},$$

d'où

(2) $$F_1(z) = i\,\mathrm{Log}\, iF'(z).$$

Telle est la relation qui existe entre les fonctions analytiques $F(z)$ et $F_1(z)$.

4° Posons $\quad f(x, y) = \theta(x+y) = \theta(\lambda).$

La condition

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\operatorname{arc\,tg} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\operatorname{arc\,tg} f = 0$$

s'écrit alors $\quad \theta''(1+\theta^2) - 2\theta\theta'^2 = 0;$

on en tire successivement

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{2\theta\theta'}{1+\theta^2}, \qquad \theta' = k(1+\theta^2), \qquad \theta = \operatorname{tg}(k\lambda + k_1).$$

Tenant compte des conditions aux limites imposées on a finalement

$$f = \operatorname{tg}(x+y).$$

Il vient ensuite

$$F_1'(z) = 1 - i, \qquad \text{d'où} \qquad F_1(z) = (1-i)z,$$

puis, d'après (1),

$$\log\mu\sqrt{1+f^2} = y - x, \qquad \mu = e^{y-x}\cos(x+y),$$
$$P_y = \mu = e^{y-x}\cos(x+y), \qquad P_x = -\mu f = -e^{y-x}\sin(x+y),$$
$$F'(z) = P_x - iP_y = -ie^{y-x-i(x+y)} = -ie^{-(i+1)z},$$

ce qui permet de vérifier que la relation (2) est satisfaite, et enfin

$$F(z) = \frac{1+i}{2}e^{-(i+1)z}$$

Les intégrales générales de (E_1) et (E_2) s'écrivent alors respectivement

$$e^{y-x}[\cos(x+y) + \sin(x+y)] = C^{te}, \qquad e^{y-x}[\cos(x+y) - \sin(x+y)] = C^{te}.$$

Problème 43.

On considère une famille de cercles, dépendant de deux paramètres u et v définie en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(E) \qquad (x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2,$$

où R *est une fonction donnée de u et de v,* $R = R(u, v)$.

1° *Les cercles* C *dont l'équation s'obtient en remplaçant dans* (E) *v par une fonction déterminée de u,* $v = f(u)$, *ont une enveloppe. Former l'équation de la droite* D *joignant les points caractéristiques d'un de ces cercles* $C(u_0, v_0)$ *correspondant aux valeurs u_0 et $v_0 = f(u_0)$.*

2° *u_0 et v_0 restant fixes, on change la fonction $f(u)$ de toutes les manières possibles,* $f(u_0)$ restant égal à v_0. *Montrer qu'alors la droite* D *passe par un point fixe* M *indépendant de f. Calculer les coordonnées de* M *en fonction de u_0 et v_0.*

3° *Comment choisir la fonction* $R(u, v)$ *pour que* M *soit le* centre *du cercle* C, *quels que soient u_0 et v_0.*

4° *Comment choisir* $R(u, v)$ *pour que* M *soit* situé sur la circonférence du cercle C, *quels que soient u_0 et v_0. Intégrer l'équation aux dérivées partielles trouvée et démontrer que la famille* (E) *se compose alors de cercles tangents à une courbe fixe arbitraire ou passant par un point fixe arbitraire.*

(*Paris, oct.* 1927, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° On obtient l'équation de la droite D en dérivant l'équation (E) par rapport à u, ce qui donne, après remplacement de u et v par u_0 et v_0,

$$(1) \qquad x - u_0 + f'(y - v_0) + R_0(R_{u_0} + f'R_{v_0}) = 0 \qquad \left(f' = \frac{df}{du_0}\right).$$

2° Si on laisse u_0 et v_0 fixes, R_0, R_{u_0} et R_{v_0} ne changent pas. Dans l'équation (1) il n'y a donc que f' à changer, et comme ce paramètre figure linéairement les droites D forment bien un faisceau. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$x - u_0 + R_0R_{u_0} + f'(y - v_0 + R_0R_{v_0}) = 0,$$

on voit que les coordonnées du sommet M du faisceau ont pour expression

$$x_1 = u_0 - R_0R_{u_0}, \qquad y_1 = v_0 - R_0R_{v_0}.$$

3° Pour que le point M soit le centre du cercle C correspondant quelles que soient les valeurs de u_0 et v_0, il faut que x_1 et y_1 se réduisent à u_0 et v_0, ce qui exige

$$R_u = 0, \qquad R_v = 0, \qquad R = C^{te}.$$

Les cercles C sont alors des cercles de rayon constant. Géométriquement il est clair que pour toute famille simplement infinie de cercles de rayon constant, les points caractéristiques relatifs à un des cercles sont diamétralement opposés.

4° Pour que M soit situé sur la circonférence du cercle C associé, il faut que les coordonnées

$$x_1 = u - RR_u, \qquad y_1 = v - RR_v$$

satisfassent à l'équation (E), ce qui exige

$$R_u^2 + R_v^2 = 1.$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, posons

$$R_u = \cos\varphi, \qquad R_v = \sin\varphi,$$

d'où

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u};$$

cette équation est linéaire, et montre que la fonction inconnue $\varphi(u, v)$ est définie implicitement par la relation

(2) $$u\sin\varphi - v\cos\varphi = F'(\varphi),$$

F désignant une fonction arbitraire. On en tire alors

$$dR = \cos\varphi\, du + \sin\varphi\, dv = d(u\cos\varphi + v\sin\varphi) + (u\sin\varphi - v\cos\varphi)d\varphi$$
$$= d(u\cos\varphi + v\sin\varphi) + F'(\varphi)d\varphi,$$

et par suite

(3) $$R = u\cos\varphi + v\sin\varphi + F(\varphi).$$

En éliminant φ entre les équations (2) et (3) on aura l'expression de R en fonction de u et v. On en tire, pour les coordonnées (x_1, y_1) de M,

$$x_1 = u - u\cos^2\varphi - v\sin\varphi\cos\varphi - F(\varphi)\cos\varphi = F'(\varphi)\sin\varphi - F(\varphi)\cos\varphi,$$
$$y_1 = v - u\cos\varphi\sin\varphi - v\sin^2\varphi - F(\varphi)\sin\varphi = -F'(\varphi)\cos\varphi - F(\varphi)\sin\varphi.$$

Ces coordonnées ne dépendant que de la seule variable φ, l'ensemble des points M associés à tous les cercles C forme une courbe Γ qui peut d'ailleurs se réduire à un point.

On a $$\frac{dx_1}{d\varphi} = (F'' + F)\sin\varphi, \qquad \frac{dy_1}{d\varphi} = -(F'' + F)\cos\varphi.$$

Donc si $$F'' + F = 0, \quad \text{ou} \quad F = A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$

la courbe Γ se réduit à un point fixe par lequel passent tous les cercles C. Si $F'' + F \neq 0$, on a, en tout point M de Γ, $\frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{cotg}\varphi$; d'ailleurs si μ est le centre d'un cercle C passant par M, le rayon μM a pour coefficient angulaire

$$\frac{y_1 - v}{x_1 - u} = \operatorname{tg}\varphi = -1 : \frac{dy_1}{dx_1},$$

ce qui montre que tous les cercles C sont tangents à la courbe Γ.

Problème 44.

Trouver les expressions générales des deux fonctions $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ *telles que les deux équations aux différentielles totales*

$$dz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy,$$
$$dz = 2[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy]$$

soient l'une et l'autre complètement intégrables. Trouver l'expression générale des fonctions $\lambda(x, y, z)$ *telles que l'équation*

$$dz = \lambda(x, y, z)[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy]$$

soit aussi complètement intégrable.

Montrer qu'on peut rendre les résultats évidents par un changement de variables. (*Paris, oct.* 1927, *épr. écr.: 2ᵉ quest.*)

La condition d'intégrabilité de l'équation $Pdx + Qdy + Rdz = 0$,

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0,$$

donne, quand on y fait successivement $R = -1$, $R = -\frac{1}{2}$,

(1) $$P_y - Q_x = 0, \qquad PQ_z - QP_z = 0.$$

La première équation (1) montre que l'on peut poser, $U(x, y, z)$ désignant une fonction arbitraire,

$$P = U_x, \qquad Q = U_y;$$

la seconde équation (1) montre que $\frac{P}{Q}$ est indépendant de z : on peut donc poser, $\theta(x, y)$ désignant une fonction arbitraire,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\theta_x}{\theta_y},$$

et par suite $$\theta_y U_x - \theta_x U_y = 0.$$

Cette dernière équation, où l'on considère U comme la fonction inconnue, donne

$$U = F[z, \theta(x, y)];$$

on en tire en définitive

$$P = F_1\theta_x, \qquad Q = F_1\theta_y,$$

$F_1(z, \theta)$ et $\theta(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires de leurs arguments.

Avec ces valeurs de P et Q, la condition d'intégrabilité de $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ se réduit à

$$QR_x - PR_y = 0,$$

ou, en supposant $F_1 \neq 0$,

$$\theta_y R_x - \theta_x R_y = 0;$$

c'est la même équation que celle qui a servi à déterminer U. On aura donc

$$\lambda(x, y, z) = -\frac{1}{R} = F_2(z, \theta).$$

Tous ces *résultats* deviennent évidents si l'on prend comme nouvelles variables θ, y et z à la place de x, y et z. Les trois équations proposées s'écrivent alors en effet

$$dz = F_1(z, \theta)d\theta, \qquad dz = 2F_1(z, \theta)d\theta, \qquad dz = F_2(z, \theta)F_1(z, \theta)d\theta,$$

et ce sont des équations complètement intégrables, puisqu'elles se réduisent à des équations différentielles ordinaires entre z et θ.

Problème 45.

Décomposer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{7x^{10} - 3}{(x^{11} + x^9 - 2x^7 - 2x^5 + x^3 + x)\sqrt{x^3 + x}} dx,$$

en la somme d'un terme algébrique et d'une intégrale

$$\int \frac{\mathrm{H}dx}{\mathrm{A}\sqrt{x^3 + x}},$$

H *et* A *étant des polynomes du plus petit degré possible.*

(*Paris, oct.* 1927, *épr. prat.*)

Désignant par I l'intégrale à étudier, écrivons d'abord

$$I = \int \frac{(7x^{10} - 3)\sqrt{x^3 + x}}{x^2(x^2 - 1)^2(x^2 + 1)^4} dx.$$

Considérant ensuite x^2 comme la variable, nous effectuerons une décomposition de la forme

$$\frac{7x^{10} - 3}{x^2(x^2 - 1)^2(x^2 + 1)^4} = \frac{a}{x^2} + \frac{b_1}{x^2 - 1} + \frac{b_2}{(x^2 - 1)^2}$$
$$+ \frac{c_1}{x^2 + 1} + \frac{c_2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{c_3}{(x^2 + 1)^3} + \frac{c_4}{(x^2 + 1)^4};$$

on trouve

$$a = -3, \quad b_1 = \frac{23}{16}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = \frac{25}{16}, \quad c_2 = \frac{55}{8}, \quad c_3 = -\frac{15}{4}, \quad c_4 = \frac{5}{2}$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à étudier les intégrales

$$\mathrm{A} = \int \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x^2} dx,$$

$$\mathrm{B}_n = \int \frac{\sqrt{x^3 + x}}{(x^2 - 1)^n} dx, \qquad n = 1, 2,$$

$$\mathrm{C}_n = \int \frac{\sqrt{x^3 + x}}{(x^2 + 1)^n} dx, \qquad n = 1, 2, 3, 4.$$

1° On a d'une part

$$A=\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^3+x}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }}+\int\frac{dx}{x\sqrt{\ }},$$

d'autre part $A=\int\sqrt{\ }d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sqrt{\ }}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\ }},$

et par suite $$A=2\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }}-2\frac{\sqrt{\ }}{x}.$$

2° On a d'abord

$$B_1=\int\frac{(x^3+x)dx}{(x^2-1)\sqrt{\ }}=\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }}+\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ }}+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{\ }}.$$

On peut d'ailleurs écrire

$$d\frac{x}{x^2-1}=\frac{-2dx}{(x^2-1)^2}-\frac{dx}{x^2-1},$$

et par suite

$$-2B_2-B_1=\int\sqrt{\ }\,d\frac{x}{x^2-1}=\frac{x\sqrt{\ }}{x^2-1}-\int\frac{x(3x^2+1)}{2(x^2-1)\sqrt{\ }}dx;$$

mais on a

$$\int\frac{x(3x^2+1)}{(x^2-1)\sqrt{\ }}dx=\int\frac{(3x^2+1)\sqrt{\ }}{(x^2-1)(x^2+1)}dx=2B_1+\int\frac{\sqrt{\ }}{x^2+1}dx=2B_1+\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }};$$

il reste donc

$$-2B_2=\frac{x\sqrt{\ }}{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }},\qquad \text{ou}\qquad B_2=-\frac{x\sqrt{\ }}{2(x^2-1)}+\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }}.$$

3° Nous avons déjà obtenu

$$C_1=\int\frac{\sqrt{\ }}{x^2+1}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{\ }};$$

nous établirons maintenant une relation de récurrence entre C_n et C_{n+1}. Partons de l'identité

$$d\frac{x}{(x^2+1)^n}=(1-2n)\frac{dx}{(x^2+1)^n}+2n\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}};$$

on en tire

$$(1-2n)C_n+2nC_{n+1}=\int\sqrt{\ }\,d\frac{x}{(x^2+1)^n}=\frac{x\sqrt{\ }}{(x^2+1)^n}-\int\frac{x(3x^2+1)dx}{2(x^2+1)^n\sqrt{\ }}.$$

Mais on a comme précédemment

$$\int\frac{x(3x^2+1)}{(x^2+1)^n\sqrt{\ }}dx=\int\frac{(3x^2+1)\sqrt{\ }}{(x^2+1)^{n+1}}dx=3C_n-2C_{n+1},$$

et il reste la relation

$$(2n-1)C_{n+1}=\frac{4n-5}{2}C_n+\frac{x\sqrt{\ }}{(x^2+1)^n}.$$

On en tire successivement

$$C_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{\ }}, \qquad C_2 = \frac{x\sqrt{\ }}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x dx}{\sqrt{\ }},$$

$$C_3 = \frac{x\sqrt{\ }}{3(x^2+1)^2} + \frac{x\sqrt{\ }}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\int \frac{x dx}{\sqrt{\ }},$$

$$C_4 = \frac{x\sqrt{\ }}{5(x^2+1)^3} + \frac{7x\sqrt{\ }}{30(x^2+1)^2} + \frac{7x\sqrt{\ }}{20(x^2+1)} - \frac{7}{40}\int \frac{x dx}{\sqrt{\ }}.$$

Ainsi, en définitive, on pourra exprimer I au moyen d'une partie algébrique tout intégrée, suivie :

1° d'une intégrale elliptique de seconde espèce (1) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^3+x}}$;

2° de deux intégrales elliptiques de troisième espèce

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^3+x}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^3+x}}.$$

En groupant les termes non intégrés, on obtient l'intégrale

$$\int \frac{x(72-49x^2)dx}{8(x^2-1)\sqrt{x^3+x}},$$

d'où l'on déduit les polynomes H et A de l'énoncé :

$$H = 72x - 49x^3, \qquad A = 8(x^2-1).$$

Problème 46.

On considère l'équation de Riccati

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy}{dx} = ay^2 + 2by + au^2,$$

dans laquelle y est la fonction inconnue de la variable x, et a, b, u sont trois fonctions uniformes connues de x.

1° *A quelle condition* (C) *les trois fonctions a, b, u doivent-elles satisfaire pour que l'équation* (E) *admette deux solutions y_1 et y_2 liées par la relation $y_2 = s^2 y_1$, s étant une constante. La condition* (C) *étant satisfaite, montrer que l'intégration de l'équation* (E) *se ramène à une quadrature.*

2° *Dans le cas particulier où $s = 2$, $u = \frac{1}{2}$, $a = \frac{8}{3(x-1)^2}$, déterminer b (de signe contraire à a) de manière que la condition* (C) *soit satisfaite, et calculer explicitement l'intégrale générale de* (E). *Déterminer ensuite* tous *les points*

(1) I, 101.

singuliers de cette intégrale générale $y(x)$, envisagée comme fonction de la variable complexe x, *préciser leur nature, et montrer qu'ils sont tous situés sur une circonférence qu'on déterminera exactement.*

(*Paris, juin* 1928, *épr. écr.* : 1re *quest.*)

1° On doit avoir par hypothèse

$$y_1' = ay_1^2 + 2by_1 + au^2,$$
$$s^2y_1' = as^4y_1^2 + 2bs^2y_1 + au^2,$$

d'où, en retranchant membre à membre et divisant par le facteur non nul $s^2 - 1$,

$$y_1' = a(s^2 + 1)y_1^2 + 2by_1 = ay_1^2 + 2by_1 + au^2 ;$$

il en résulte, a étant évidemment supposé différent de zéro,

$$y_1 = \frac{u}{s}.$$

Inversement, si l'équation (E) admet l'intégrale $\frac{u}{s}$, on a

$$\frac{u'}{s^2} = a\frac{u^2}{s} + 2b\frac{u}{s} + au^2,$$

ou encore
$$su' = au^2 + 2bsu + as^2u^2,$$

ce qui exprime que (E) admet aussi l'intégrale su. La relation précédente exprime donc la condition (C) demandée. Si cette condition est remplie, on connaît immédiatement deux intégrales particulières, $\frac{u}{s}$ et su, de l'équation de Riccati, et son intégration est par suite ramenée à une quadrature (1).

2° Dans le cas particulier indiqué on trouve $b = \frac{-5}{3(x-1)^2}$. Le changement de variable $y = 1 + \frac{1}{z}$ fait passer de (E) à l'équation

$$-3(x-1)^2z' = 6z + 8.$$

Les variables se séparent et l'on a, en posant $\frac{2}{1-x} = u$,

$$3z + 4 = Ce^{-u}, \qquad y = \frac{C - e^u}{C - 4e^u}.$$

Outre le point singulier essentiel $x = 1$, cette fonction y, où la constante C a reçu une détermination particulière $\left(\text{autre que } C = 0 \text{ ou } \frac{1}{C} = 0, \text{ qui correspondent aux intégrales particulières } y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = 1\right)$, admet une infinité de points singuliers racines de l'équation

$$C - 4e^u = 0.$$

(1) II, 12.

Posons $C = 4\rho e^{i\theta}$; on aura

$$\frac{2}{1-x} = \log \rho + i(\theta + 2k\pi),$$

d'où, en posant encore $x = \xi + i\eta$,

$$(\xi + i\eta - 1)[\log \rho + i(\theta + 2k\pi)] = -2.$$

On en tire successivement

$$(\xi - 1)\log \rho - \eta(\theta + 2k\pi) = -2,$$
$$(\xi - 1)(\theta + 2k\pi) + \eta \log \rho = 0,$$

d'où, en éliminant $\theta + 2k\pi$,

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \frac{2}{\log \rho}(\xi - 1) = 0,$$

équation d'une circonférence qui passe aussi par le point singulier essentiel $x = 1$. Si $\rho = 1$ cette circonférence se réduit à la droite $\xi = 1$.

Problème 47.

Soient Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires. Une famille de surfaces se déduisant de l'une d'elles par une translation parallèlement à l'axe* Oz *est représentée par une équation*

(E) $$z + f(x, y) = C,$$

où C *désigne une constante arbitraire.*

1° *On demande à quelle condition doit satisfaire la fonction* $f(x, y)$ *pour que les trajectoires orthogonales* (Γ) *des surfaces de cette famille soient des courbes planes situées dans des plans parallèles à l'axe* Oy. *(On pourra obtenir cette condition en écrivant que ces courbes se projettent sur le plan* xOz *suivant des lignes droites.)*

2° *Nous appellerons surfaces* (S) *les surfaces représentées par l'équation* (E) *où la fonction* $f(x, y)$ *satisfait à la condition précédente. Démontrer que ces surfaces possèdent la propriété suivante : si en un point quelconque* M *de l'une d'elles on mène la normale* MN *à cette surface et la parallèle* Mz' *à l'axe* Oz, *l'angle de ces deux droites dépend uniquement de la distance du point* M *au plan* xOz, *lorsque le point* M *décrit la surface* (S). *En déduire les équations générales de ces surfaces.*

3° *La fonction* $f(x, y)$ *satisfaisant à la condition précédente, les trajectoires orthogonales* (Γ) *des surfaces* (S) *s'obtiennent* en général *sans aucune intégration. Y a-t-il un cas exceptionnel?*

4° *Trouver les surfaces* (S) *qui se déduisent par une translation parallèlement à* Oz *d'une surface de révolution autour de* Ox, *et leurs trajectoires orthogonales.*

5° *Les courbes* (Γ) *peuvent-elles être des lignes droites? — Quelle est alors la nature des surfaces* (S)?

(*Paris, juin* 1928, *épr. écr. :* 2e *quest.*)

1° Posons $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$. Les trajectoires orthogonales des surfaces définies par l'équation (E) sont les intégrales du système

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{1},$$

que l'on peut encore écrire

$$(1) \qquad \frac{dx}{dz} = p, \qquad \frac{dy}{dz} = q.$$

Supposons que z représente la coordonnée courante sur une courbe Γ. Pour que cette courbe soit située dans un plan parallèle à l'axe des y, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{d^2x}{dz^2} = 0$, c'est-à-dire, d'après (1),

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dz} = p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial y} = p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Cette relation en x et y doit être vérifiée en tout point de la courbe Γ considérée. Or il passe une courbe Γ par tout point de l'espace : si donc toutes les courbes Γ sont situées dans des plans parallèles à Oy, la relation doit être vérifiée *identiquement*, ce qui exige que l'on ait

$$(2) \qquad p^2 + q^2 = Y^2(y).$$

Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

2° La relation (2) exprime que le cosinus de l'angle de la normale à S avec Oz, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+Y^2}}$, ne dépend que de la coordonnée y, c'est-à-dire de la distance au plan xOz du pied de la normale.

L'équation (2) s'intègre aisément. On a évidemment une intégrale complète en posant

$$p = a, \qquad q = \sqrt{Y^2 - a^2},$$

a désignant une constante arbitraire, et par suite

$$f = ax + \int \sqrt{Y^2 - a^2}\,dy.$$

Les surfaces S correspondantes sont des cylindres ayant leurs génératrices parallèles au plan xOz. L'intégrale générale se détermine alors par les méthodes classiques : l'équation des surfaces S résultera de l'élimination de a entre les équations

$$z + ax + \int_{y_0}^{y} \sqrt{Y^2 - a^2}\,dy + \theta(a) = 0,$$

$$x - \int_{y_0}^{y} \frac{a}{\sqrt{Y^2 - a^2}}\,dy + \theta'(a) = 0,$$

$\theta(a)$ désignant une fonction arbitraire, et y_0 ayant une valeur numérique déterminée.

3° Reprenons le système (1) qui définit les courbes Γ. La fonction f vérifiant (2), on sait *a priori* que le système (1) admet la solution

$$x = az + b,$$

a et b désignant deux constantes arbitraires. La première équation (1) donne alors $a = p$, et cette relation en x et y achève de déterminer, sans quadrature, les courbes Γ, en faisant connaître leurs projections sur le plan xOy.

Il y a toutefois un cas exceptionnel, celui où l'équation $p = a$ serait une identité, c'est-à-dire le cas où f serait linéaire en x. Les surfaces S sont alors des cylindres : ce sont précisément les cylindres de l'intégrale complète obtenue au 2°.

4° Une surface de révolution autour de Ox est définie par une équation de la forme

$$z^2 + y^2 = X^2(x),$$

X ne dépendant que de la seule variable x. On doit donc avoir

$$f = \sqrt{X^2 - y^2}.$$

Portons cette valeur de f dans l'équation (2); nous aurons

$$X^2X'^2 + y^2 = X^2Y^2 - y^2Y^2. \tag{3}$$

Dérivons par rapport à x ; il vient, en écartant provisoirement la solution $X' = 0$,

$$X'^2 + XX'' = Y^2 = a,$$

a désignant une constante, qui, d'après (3), est nécessairement égale à -1, et l'on tire alors de (3) $X'^2 = -1$, d'où $X^2 = -(x + \alpha)^2$. La surface S est alors un cône isotrope (1)

$$(x + \alpha)^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

ayant son sommet sur Ox.

Supposons maintenant $X' = 0$, $X^2 = a^2$; la relation (3) donne alors

$$Y^2 = \frac{y^2}{a^2 - y^2},$$

et la surface de révolution cherchée est un cylindre d'axe Ox. Pour avoir les courbes Γ, reprenons le système (1) en y faisant $f = \sqrt{a^2 - y^2}$; la première équation donne $x = C^{te}$, ce qui montre que les courbes Γ sont dans des plans parallèles au plan yOz. Elles se projetteront donc sans déformation sur ce plan, suivant les courbes intégrales de la seconde équation (1), qui s'écrit ici

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Cette équation s'intègre aisément et donne

$$y = a \sin \varphi, \qquad z = -a\left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi\right) + C^{te}.$$

Les courbes Γ sont des tractrices ayant leurs bases dans le plan $y = 0$.

---

(1) I, 17.

5° Pour que les courbes Γ soient des droites, il faut et il suffit que les équations (1) aient pour conséquence

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = 0\,;$$

la première équation exige, nous l'avons vu, que $p^2 + q^2$ ne dépende que de y ; la seconde exige de même que $p^2 + q^2$ ne dépende que de x. On devra donc avoir

$$p^2 + q^2 = a^2, \tag{4}$$

a désignant une constante arbitraire, et la condition est suffisante.

L'équation (4) admet l'intégrale complète

$$z = a(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \beta,$$

formée des plans qui font avec Oz un angle constant V $\left(\sin V = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$.

Ce sont les plans parallèles aux plans tangents au cône C

$$(x^2 + y^2)\cos^2 V - z^2 \sin^2 V = 0\,;$$

on peut encore dire que ce sont les plans tangents à la conique c suivant laquelle le cône C coupe le plan de l'infini. Les surfaces S sont donc des développables quelconques passant par c ; comme leur plan tangent fait un angle constant avec Oz, leurs arêtes de rebroussement seront des hélices tracées sur des cylindres dont les génératrices sont parallèles à Oz.

Problème 48.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$z + px + qy + \frac{p^2}{q^2} = 0, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Trouver la surface intégrale S *passant dans le plan des* xy *par la parabole*

$$2x = y^2.$$

Déterminer l'enveloppe C *des caractéristiques formant* S, *et calculer avec trois décimales exactes la longueur de* C *entre les cotes* $z = 1$ *et* $z = 2$.

(*Paris, juin* 1928, *épr. prat.*)

Du système différentiel des caractéristiques on déduit immédiatement la combinaison intégrable $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$, qui permet de poser

$$p = \rho \sin \varphi, \qquad q = \rho \cos \varphi,$$

φ désignant une constante arbitraire. On tire alors de l'équation proposée

$$z = -\rho(x \sin \varphi + y \cos \varphi) - \mathrm{tg}^2\, \varphi,$$

et l'équation $dz - pdx - qdy = 0$ s'écrit

$$(x \sin \varphi + y \cos \varphi)d\rho + 2\rho(\sin \varphi dx + \cos \varphi\, dy) = 0\,;$$

on en déduit, a désignant une seconde constante arbitraire,

$$\rho(x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = a,$$

et on a une intégrale complète formée des cylindres définis par l'équation

(1) $$(z + \mathrm{tg}^2\, \varphi)(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + a = 0.$$

Cherchons par la méthode classique (¹) la surface intégrale qui passe par la parabole

$$z = 0, \qquad y^2 - 2x = 0\,;$$

cette courbe peut être représentée paramétriquement par les équations

$$x = 2\lambda^2, \qquad y = 2\lambda, \qquad z = 0.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1); elle s'écrit

(2) $$2\, \mathrm{tg}^2\, \varphi(\lambda^2 \sin \varphi + \lambda \cos \varphi) + a = 0.$$

Éliminer λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ revient à écrire que l'équation (2) a une racine double, ce qui donne

$$\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - 2a \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi = 0,$$

ou, en éliminant les solutions parasites $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 0$,

$$a = \frac{\sin \varphi}{2}.$$

Remplaçons a par cette valeur dans l'équation (1), et posons $\mathrm{tg}\, \varphi = t$; on obtient l'équation

(3) $$(z + t^2)(tx + y) + \frac{t}{2} = 0,$$

qui définit, quand on fait varier le paramètre t, une famille de cylindres dont l'enveloppe donne l'intégrale cherchée. Cette intégrale est donc représentée par les équations (3) et

(4) $$2t(tx + y) + x(z + t^2) + \frac{1}{2} = 0.$$

Résolvant par rapport à x et y le système (3)—(4), on obtient

$$x = \frac{t^2 - z}{2(t^2 + z)^2}, \qquad y = -\frac{t^3}{(t^2 + z)^2}\,;$$

posant enfin $t^2 + z = \dfrac{1}{u}$, on a, en coordonnées paramétriques u et t, les équations de la surface S sous la forme

$$x = u^2t^2 - \frac{u}{2}, \qquad y = \quad t^3u^2, \qquad z = \frac{1}{u} - t^2.$$

(¹) II, **242**.

Sur cette surface les courbes $t = C^{te}$ sont les caractéristiques (car $t = \operatorname{tg} \varphi$). Pour obtenir leur enveloppe, qui est une arête de rebroussement de S, cherchons les points où le plan tangent est indéterminé. On a, pour les coefficients directeurs A, B, C de ce plan,

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, t)} = t^2(4ut^2 - 3), \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u, t)} = t(4ut^2 - 3),$$

$$= \frac{D(x, y)}{D(u, t)} = -\frac{t^2u^2}{2}(4ut^2 - 3);$$

on obtient donc, comme lignes singulières, d'une part la courbe $t = 0$ qui est une caractéristique particulière, d'autre part la courbe $4ut^2 - 3 = 0$ qui est l'enveloppe des caractéristiques, c'est-à-dire une courbe intégrale (¹) de l'équation aux dérivées partielles proposée.

On a, pour les équations paramétriques de cette courbe,

$$x = \frac{3}{16t^2}, \qquad y = -\frac{9}{16t}, \qquad z = \frac{t^2}{3}.$$

En remarquant que z est nécessairement positif, on peut encore adopter la représentation paramétrique

$$x = \frac{1}{16z}, \qquad y = -\frac{3\sqrt{3}}{16} z^{-\frac{1}{2}}, \qquad z = z,$$

qui donne, pour l'arc s de la courbe,

$$ds = \sqrt{1 + \frac{27}{1024z^3} + \frac{1}{256z^4}}\, dz.$$

La longueur l de l'arc compris entre les plans $z = 1$ et $z = 2$ est donc donnée par l'intégrale

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{27}{1024z^3} + \frac{1}{256z^4}}\, dz.$$

Posons
$$\frac{27}{1024z^3} + \frac{1}{256z^4} = \rho;$$

on aura
$$(1 + \rho)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{8} + \frac{\rho^3}{16} - \cdots;$$

à partir du second terme, la série du second membre est une série alternée dont le terme général tend évidemment vers zéro. On aura donc

$$\int_1^2 \left(1 + \frac{\rho}{2}\right) dz > l > \int_1^2 \left(1 + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right) dz.$$

(¹) II, 273.

On a d'ailleurs successivement

$$\frac{\rho^2}{8} < \frac{1}{8}\left(\frac{27}{1024} + \frac{1}{256}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{31}{32^2}\right)^2 < \frac{1}{8 \cdot 32^2} < 0{,}0002,$$

donc

$$\int_1^2 \frac{\rho^2}{8} dz < 0{,}0002.$$

D'autre part

$$\int_1^2 \left(1 + \frac{\rho}{2}\right) dz = \left| z - \frac{27}{4096 z^2} - \frac{1}{1536 z^3} \right|_1^2 = 1{,}0055\ldots$$

On aura donc en définitive

$$l = 1{,}005$$

avec trois décimales exactes, la quatrième décimale étant 3, 4 ou 5.

Problème 49.

Les axes Ox, Oy, Oz étant rectangulaires, on considère la sphère σ définie par l'équation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 - 2zZ = 0$$

où x, y, z désignent les coordonnées du centre M de la sphère et X, Y, Z les coordonnées courantes.

1° *Lorsque M décrit une courbe gauche C, la sphère σ a pour enveloppe une surface Σ.*

a) Déterminer le cercle caractéristique γ de la sphère σ, et en donner une construction géométrique connaissant M et la tangente en M à la courbe C.

b) Le cylindre φ projetant C sur xOy étant fixé arbitrairement, déterminer C sur ce cylindre de manière que le cercle caractéristique γ ait, quel que soit M sur C, un rayon constant égal à un ; *que devient alors C lorsqu'on développe le cylindre φ sur un plan?*

2° *Lorsque M décrit une surface S d'équation cartésienne $z = f(x, y)$, la sphère σ a pour enveloppe une surface Σ : définir géométriquement les deux points caractéristiques de la sphère σ, connaissant M et le plan tangent en M à S; déterminer $f(x, y)$ de manière que la distance de ces deux points caractéristiques reste constamment égale à 2 quel que soit M sur S, et intégrer l'équation aux dérivées partielles à laquelle on est ainsi conduit.*

(*Paris, oct.* 1928, *épr. écr. : 1re quest.*)

1° *a*. Le cercle caractéristique γ est représenté par les équations (1)

$$\begin{aligned} (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 - 2zZ &= 0, \\ x'(X - x) + y'(Y - y) + z'Z &= 0, \end{aligned}$$

(1) II, 107.

où x', y', z' représentent les dérivées de x, y, z par rapport au paramètre t qui définit la position de M sur C. La seconde équation est l'équation du plan de γ, et il est visible que ce plan n'est autre que le plan mené perpendiculairement à la tangente à C au point M par le point $m(x, y, 0)$ projection de M sur le plan xOy, ce qui permet de construire géométriquement le cercle γ.

b. Supposons que le paramètre t soit l'arc de la courbe c projection de C sur le plan xOy. Soit δ la distance du point $M(x, y, z)$ au plan de γ ; on a

$$\delta^2 = \frac{z^2 z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{z^2 z'^2}{1 + z'^2}.$$

Le rayon du cercle γ étant égal à $\sqrt{z^2 - \delta^2}$ puisque $|z|$ est le rayon de la sphère σ, on devra avoir

$$z^2 - \frac{z^2 z'^2}{1 + z'^2} = 1,$$

d'où
$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \varepsilon dt \qquad \text{et} \qquad z = \operatorname{ch}(t - a),$$

a désignant une constante arbitraire.

Si l'on développe le cylindre φ sur un plan, on peut considérer z et t comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point de la courbe suivant laquelle se développe la courbe C : donc C se développe suivant une chaînette.

2° Les équations de l'enveloppe de la sphère σ sont

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 - 2zZ = 0,$$
$$X - x + pZ = 0, \qquad Y - y + qZ = 0,$$

p et q désignant les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Si l'on résout ces trois équations par rapport à X, Y, Z, on aura les coordonnées des deux points caractéristiques (¹): or les deux dernières représentent une parallèle à la normale en M à S menée par le point $m(x, y, 0)$. Donc l'un des points caractéristiques est le point m, l'autre est le point m' où la sphère σ est coupée par la perpendiculaire abaissée de m sur le plan tangent en M à S.

On trouve immédiatement pour les coordonnées du point m'

$$X = x - \frac{2pz}{1 + p^2 + q^2}, \qquad Y = y - \frac{2qz}{1 + p^2 + q^2}, \qquad Z = \frac{2z}{1 + p^2 + q^2}.$$

La condition $\overline{mm'}^2 = 4$ s'exprime donc par l'équation

$$p^2 + q^2 + 1 = z^2.$$

Du système différentiel des caractéristiques on déduit immédiatement la combinaison intégrable

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p}{q} = C^{te}.$$

(¹) II, 111.

On peut donc poser, φ désignant une constante arbitraire,

$$p = \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi, \qquad q = \sqrt{z^2 - 1} \sin \varphi,$$

et l'équation $dz = pdx + qdy$ s'écrit

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy,$$

d'où l'on déduit l'intégrale complète

$$z = \operatorname{ch}(x \cos \varphi + y \sin \varphi - a).$$

Cette intégrale complète est formée de cylindres dont les génératrices sont parallèles au plan xOy et dont les sections droites sont des chaînettes égales. On en tire l'intégrale générale par le procédé classique.

Problème 50.

Soit y une intégrale quelconque *de l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = yf(x),$$

$f(x)$ étant une fonction donnée de x. Démontrer que le cube de cette intégrale $z = y^3$ vérifie une équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre (E_1) *dont les coefficients ne dépendent que de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées, et calculer ces coefficients.*

Connaissant deux intégrales particulières distinctes y_1, y_2 de l'équation (E), *en déduire l'intégrale générale de l'équation* (E_1).

A quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour que l'équation (E_1) *admette l'intégrale particulière $z = 1$?*

Trouver les fonctions rationnelles $f(x)$ satisfaisant à cette condition, et vérifier directement le résultat.

(*Paris, oct.* 1928, *épr. écr. :* 2e *quest.*)

On a successivement, compte tenu de (E),

$$z = y^3, \qquad z' = 3y^2y', \qquad z'' = 3y^3f + 6yy'^2, \qquad z''' = 3y^3f' + 21y^2y'f + 6y'^3,$$
$$z^{(4)} = 3y^3(f'' + 7f^2) + 30y^2y'f' + 60yy'^2f.$$

Éliminons entre ces cinq équations les quantités

$$y^3, \qquad y^2y', \qquad yy'^2, \qquad y'^3;$$

si l'on remarque que y'^3 ne figure que dans la quatrième, il suffira d'éliminer

$$y^3, \qquad y^2y', \qquad yy'^2,$$

entre les trois premières et la cinquième, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 3 & 0 \\ z'' & 3f & 0 & 6 \\ z^{(4)} & 3(f''+7f^2) & 30f' & 60f \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$(E_1) \qquad z^{(4)} - 10fz'' - 10f'z' + z(9f^2 - 3f'') = 0.$$

Soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières de (E). L'équation (E_1) admet l'intégrale particulière

$$z = (\alpha y_1 + \beta y_2)^3 = \alpha^3 y_1^3 + 3\alpha^2\beta y_1^2 y_2 + 3\alpha\beta^2 y_1 y_2^2 + \beta^3 y_2^3;$$

comme elle admet aussi les intégrales y_1^3 et y_2^3, il en résulte qu'elle admet l'intégrale particulière

$$z = 3\alpha^2\beta y_1^2 y_2 + 3\alpha\beta^2 y_1 y_2^2$$

pour toutes les valeurs des constantes arbitraires α et β ; autrement dit l'intégrale

$$z = a y_1^2 y_2 + b y_1 y_2^2$$

pour toutes les valeurs des constantes arbitraires a et b, ce qui revient à dire qu'elle admet les intégrales particulières $y_1^2 y_2$ et $y_1 y_2^2$. Nous connaissons donc quatre intégrales particulières de (E_1), savoir

$$y_1^3, \qquad y_1^2 y_2, \qquad y_1 y_2^2, \qquad y_2^3,$$

et il est clair que ces quatre intégrales sont distinctes. L'intégrale générale de (E_1) s'écrit donc

$$z = A y_1^3 + B y_1^2 y_2 + C y_1 y_2^2 + D y_2^3.$$

Pour que l'équation (E_1) admette l'intégrale $z = 1$, il faut et il suffit que l'on ait

$$f'' - 3f^2 = 0.$$

On en tire

$$2f'f'' - 6f^2 f' = 0, \qquad f'^2 = 2f^3 + C, \qquad \frac{df}{\sqrt{2f^3 + C}} = \varepsilon dx \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pour que f soit une fonction algébrique, il est nécessaire que $C = 0$; on a alors

$$f^{-\frac{3}{2}} df = \varepsilon\sqrt{2}\, dx, \qquad 2f^{-\frac{1}{2}} = -\varepsilon\sqrt{2}\,(x + a), \qquad f = \frac{2}{(x+a)^2}.$$

En prenant comme nouvelle variable indépendante $x + a$ à la place de x, on pourra poser

$$f = \frac{2}{x^2}.$$

L'équation (E) s'écrit dans ce cas

$$x^2 y'' - 2y = 0;$$

c'est une équation d'Euler. Cherchant des intégrales particulières de la forme x^n, on trouve

$$y_1 = \frac{1}{x}, \qquad y_2 = x^2, \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{a}{x} + bx^2.$$

Quant à l'équation (E_1), elle prend la forme

$$x^3 z^{(4)} - 20xz'' + 40z' = 0;$$

c'est encore une équation d'Euler, et on vérifie aisément qu'elle admet les intégrales premières

$$z_1 = \frac{1}{x^3}, \qquad z_2 = 1, \qquad z_3 = x^3, \qquad z_4 = x^6,$$

ce qui est bien d'accord avec les résultats obtenus précédemment.

Problème 51.

Calculer avec une erreur relative inférieure à 0,1 *un couple de périodes distinctes de l'intégrale indéfinie*

$$\int_a^z \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2 - z^3}},$$

a étant indépendant de z. (*Paris, oct.* 1928, *épr. prat.*)

Le polynome sous le radical admet les racines

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 1, \qquad z_3 = -2.$$

On obtiendra donc un couple de périodes distinctes, $2\omega_1$ et $2\omega_2$, en posant [1]

$$\omega_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(2 - x - x^2)}}, \qquad \omega_2 = i\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x^2 + x - 2)}},$$

les deux intégrales à calculer étant des intégrales de fonction réelle prises suivant un segment de l'axe réel.

Calcul de ω_1. Posant $x = \sin^2\varphi$, on a immédiatement

$$\omega_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 + \sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

On voit d'abord que $\omega_1 > \frac{\pi}{\sqrt{3}}$; pour avoir $\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} < \frac{1}{10}$, ou $\Delta\omega_1 < \frac{\omega_1}{10}$, il suffira donc de prendre $\Delta\omega_1 < \frac{1}{10}$. On a ensuite

$$\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{4} + \frac{3\sin^4\varphi}{32} - \dots;$$

(1) I, 215.

et il est clair que dans la série alternée du second membre le terme général tend vers zéro. En arrêtant la série à son second terme, on commettra sur ω_1 une erreur inférieure à

$$\frac{3\sqrt{2}}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi=\frac{9\pi\sqrt{2}}{16.32}<\frac{9\times 3{,}2\times 1{,}5}{32\times 16}<\frac{30}{320}.$$

On a alors
$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{4}\right)d\varphi=\frac{7\pi\sqrt{2}}{16}.$$

Il vient ensuite $\quad \Delta\pi\sqrt{2}=\pi\Delta\sqrt{2}+\sqrt{2}\Delta\pi<4\Delta\sqrt{2}+2\Delta\pi$;

en prenant $\pi=3{,}141$ et $\sqrt{2}=1{,}414$, on aura

$$\Delta\pi<\frac{1}{1\,000},\qquad \Delta\sqrt{2}<\frac{1}{1\,000},\qquad \text{donc}\qquad \Delta\pi\sqrt{2}<\frac{6}{1\,000}.$$

On trouve ainsi $\pi\sqrt{2}=4{,}441$, avec une nouvelle erreur inférieure à $\frac{1}{1\,000}$,

$$\pi\sqrt{2}=4{,}441,\qquad \Delta\pi\sqrt{2}<\frac{7}{1\,000},$$

puis $\frac{7\pi\sqrt{2}}{16}=1{,}943$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{1\,000}$,

$$\frac{7\pi\sqrt{2}}{16}=1{,}943,\qquad \Delta\frac{7\pi\sqrt{2}}{16}<\frac{49}{16\,000}+\frac{1}{1\,000}<\frac{2}{320}.$$

Il vient donc en définitive

$$\omega_1=1{,}943,\qquad \Delta\omega_1<\frac{30}{320}+\frac{2}{320}=\frac{1}{10};$$

c'est l'approximation demandée.

Calcul de ω_2. Posant $x=-1-\cos\varphi$, on a

$$\frac{1}{i}\omega_2=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{2+\cos\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{\cos\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi.$$

On a comme précédemment $|\omega_2|>\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, et on en déduit qu'il suffira de prendre $\Delta|\omega_2|<\frac{1}{10}$.

Développant la fonction à intégrer, on a ensuite

$$\left(1+\frac{\cos\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\cos^2\varphi}{2^2}-\dots+(-1)^n\frac{1.3\dots 2n-1}{2.4\dots 2n}\frac{\cos^n\varphi}{2^n}+\cdots;$$

quand φ varie de zéro à π, la série du second membre est absolument et uniformément convergente, car son terme général reste en valeur absolue inférieur au terme général d'une série à termes positifs et constants qui est convergente,

$$v_n=\frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{1}{2^n},\qquad \frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{1}{2}.$$

On pourra donc intégrer terme à terme dans l'intervalle $(0, \pi)$. Or on a évidemment

$$\int_0^\pi \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2n} \varphi d\varphi,$$

d'où, en faisant dans la dernière intégrale le changement de variable $\varphi = \pi - \theta$,

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi;$$

posant alors $\sin^2 \varphi = u$, on aura

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi = \int_0^1 (1-u)^{n-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du = \mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n-2)2n}\pi.$$

On en tire

$$\int_0^\pi \left(1+\frac{\cos\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \pi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2^2}$$
$$+ \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \ldots 4n-1}{2 \,.\, 4 \ldots 4n} \cdot \frac{1 \,.\, 3 \ldots 2n-1}{2 \,.\, 4 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n}} + \cdots$$

Dans la série du second membre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent est constamment inférieur à $\frac{1}{4}$ et tend vers $\frac{1}{4}$ quand n croît indéfiniment. En arrêtant la série au terme u_n, on commettra donc une erreur inférieure à

$$u_{n+1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right) = \frac{4}{3}u_{n+1};$$

or on a, pour le troisième terme de la série, la valeur

$$u_3 = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} \cdot \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{\pi}{2^4} = \frac{105\pi}{2^{14}}, \qquad \frac{4u_3}{3} = \frac{35\pi}{2^{12}} = \frac{35\pi}{64^2} < \frac{35}{32^2} < \frac{4}{100};$$

on pourra donc prendre, avec une erreur inférieure à $\frac{4}{100}$,

$$\int_0^\pi \left(1+\frac{\cos\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \pi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2^2} = \frac{67\pi}{64}.$$

Revenons alors à ω_2, on aura

$$\omega_2 = \frac{67\pi\sqrt{2}}{128}i, \qquad \Delta|\omega_2| < \frac{4}{100}\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{100};$$

nous avons trouvé précédemment $\pi\sqrt{2} = 4{,}441$ avec une erreur inférieure à

$\frac{7}{1000}$, donc $\frac{67\pi\sqrt{2}}{128} = \frac{67 \times 4,441}{128}$ avec une erreur inférieure à $\frac{4}{1000}$. Cette dernière quantité est égale à 2,324 avec une nouvelle erreur inférieure à $\frac{1}{1000}$; on a donc en définitive

$$\omega_2 = 2,324i, \qquad \Delta|\omega_2| < \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{35}{1000} < \frac{1}{10}.$$

Nous avons ainsi obtenu un couple de périodes distinctes avec une erreur relative inférieure à 0,1 :

$$2\omega_1 = 3,886, \qquad 2\omega_2 = 4,648i.$$

Problème 52.

Les axes $Oxyz$ sont rectangulaires. On désigne par C un cercle variable du plan Oxy, dépendant des deux paramètres (x, y), dont l'équation est

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 - z^2 = 0,$$

où $z = f(x, y)$ est une fonction déterminée de (x, y); (X, Y) sont les coordonnées courantes d'un point de C. A chaque point $m(x, y, z)$ de la surface S, d'équation $z = f(x, y)$, correspond ainsi un cercle C.

1° *Lorsque m décrit sur S une courbe γ, définie par sa projection $y = g(x)$ sur xOy, le cercle C admet une enveloppe E_γ qu'il touche, en général, en deux points M et M'. Déterminer l'équation de MM', et en donner une construction géométrique connaissant la tangente mt à γ en m. A chaque tangente mt de S correspondent ainsi deux points M, M' de C, et les tangentes MT, M'T' à C en ces points.*

2° *En chaque point m de S on peut choisir mt (en général de deux façons différentes) de manière qu'elle soit orthogonale à MT, les deux directions mt_1 et mt_2 possédant cette propriété pouvant être réelles et distinctes, ou confondues, ou imaginaires. Caractériser par une propriété géométrique simple la région Σ de S où elles sont réelles et distinctes, et la courbe Γ limitant cette région. Déterminer les surfaces S exceptionnelles pour lesquelles mt_1 et mt_2 sont toujours confondues.*

3° *S n'étant pas exceptionnelle, il existe sur elle deux familles de courbes (γ_1) et (γ_2) telles que, par chaque point m de S, il en passe une de la famille (γ_1) tangente à mt_1 et une de la famille (γ_2) tangente à mt_2. Équation différentielle des projections de ces courbes sur xOy. Dans quelle relation géométrique se trouvent une courbe (γ_1) et l'enveloppe E_{γ_1} correspondante? Les courbes (γ_1) et (γ_2) présentent-elles sur Γ quelque particularité? Pour quelles surfaces S_1 l'une des familles (γ_1) ou (γ_2) est-elle formée de courbes planes dans des plans parallèles à Oz?*

4° *Déterminer* S *de façon que la projection sur xOy de la famille (γ_1) soit une famille* donnée *de courbes $g(x, y) = a$, dépendant du paramètre a.* S *est*

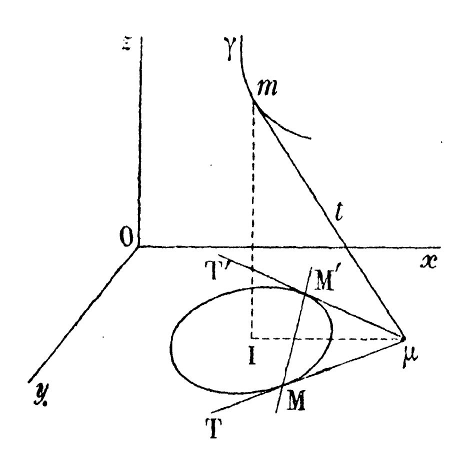
alors intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles qui s'intègre par une seule quadrature. Expliquer ce résultat par des considérations géométriques. Effectuer complètement l'intégration dans le cas où la famille donnée est composée des cercles concentriques $x^2+y^2=a^2$.

(*Paris, juillet* 1929, *épr. écr.: 1re quest.*)

1° Posons $\frac{\partial f}{\partial x}=p$, $\frac{\partial f}{\partial y}=q$. En dérivant par rapport à x l'équation du cercle C on aura pour MM′ l'équation

$$(1) \qquad X-x+g'(Y-y)+z(p+qg')=0.$$

Considérons le cône de révolution $\mathcal{C}$, de sommet m, passant par C. Soit I le centre de C; le rayon de C étant égal à Im, le demi-angle au sommet du cône $\mathcal{C}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$. A la courbe C correspond ainsi une famille de cônes égaux, chaque cône $\mathcal{C}$ est touché par le cône infiniment voisin suivant deux génératrices qui sont évidemment mM et mM′. La tangente mt à γ en m étant la position limite de la droite qui joint les sommets des deux cônes est l'intersection des plans tangents à $\mathcal{C}$ suivant les deux génératrices caractéristiques mM et mM′. Par suite, si μ est le point où cette tangente coupe le plan $z=0$, μM et μM′ sont tangents à C, autrement dit MM′ est la polaire de μ par rapport à C.



Il est facile de retrouver ce résultat par le calcul. Soient (ξ, η) les coordonnées d'un point du plan de C. La polaire de C par rapport à ce point a pour équation [1]

$$(2) \qquad (X-x)(\xi-x)+(Y-y)(\eta-y)-z^2=0.$$

Or pour le point μ, intersection du plan $Z=0$ par la droite

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{g'}=\frac{Z-z}{p+qg'},$$

on a

$$(3) \qquad \xi=x-\frac{z}{p+qg'}, \qquad \eta=y-\frac{zg'}{p+qg'};$$

portant ces valeurs de ξ, η dans l'équation (2) et supprimant le facteur z, on retrouve l'équation (1).

2° La droite mt se projette sur le plan xOy suivant μI : la droite MM′, perpendiculaire à μI, est perpendiculaire au plan μIm, donc orthogonale à mt. En tout

[1] I, 25.

point m où le plan tangent à S n'est pas parallèle à Oz, mt ne peut pas être perpendiculaire au plan xOy : elle ne peut donc être perpendiculaire à MT que si MT coïncide avec MM', ce qui exige que μ soit sur C. On doit donc avoir, (ξ, η) désignant toujours les coordonnées de μ,

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - z^2 = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (3),

$$(q^2 - 1)g'^2 + 2pqg' + p^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

Aux deux racines de cette équation en g' correspondent les directions mt^1 et mt_2 de l'énoncé.

Le discriminant de cette équation est égal à $p^2 + q^2 - 1$. La région Σ est celle pour laquelle cette expression est positive : on a donc en tout point de Σ

$$\frac{1}{1 + p^2 + q^2} < \frac{1}{2},$$

ce qui exprime que l'angle aigu de la normale à S avec Oz est supérieur à $\frac{\pi}{4}$. L'interprétation géométrique est évidente : si le point μ est sur C, on a

$$\widehat{\mu m \mathrm{I}} = \frac{\pi}{4};$$

donc la normale, qui est dans le plan perpendiculaire en m à $m\mu$, fait avec mI un angle au moins égal à $\frac{\pi}{4}$.

La courbe Γ, qui limite la région Σ, est le lieu des points où la normale à S fait avec Oz l'angle $\frac{\pi}{4}$.

En définitive, on obtiendra les directions mt_1 et mt_2 relatives à un point m de S en joignant ce point aux deux points où le plan tangent en m à S rencontre le cercle C. Autrement dit mt_1 et mt_2 sont les génératrices suivant lesquelles le cône $\mathcal{C}$ coupe le plan tangent. Il est clair que toute courbe γ qui est tangente en chacun de ces points à l'une des directions mt_1 ou mt_2 est une hélice sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz et coupent γ sous un angle égal à $\frac{\pi}{4}$.

Pour que mt_1 et mt_2 coïncident en chaque point de S, il faut et il suffit que S soit une intégrale de l'équation

$$p^2 + q^2 = 1.$$

On obtiendra une intégrale complète en posant, α désignant une constante quelconque,

$$p = \cos\alpha, \qquad q = \sin\alpha,$$

d'où

$$z = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \beta.$$

On a ainsi une intégrale complète formée des plans parallèles aux plans tangents au cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Ce cône coupe le plan de l'infini suivant une

conique c : l'intégrale générale est la développable la plus générale passant par cette conique. On aura son équation en éliminant α entre les équations

$$z = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \beta(\alpha), \qquad 0 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + \beta'(\alpha),$$

où $\beta(\alpha)$ désigne une fonction arbitraire.

3° On obtient l'équation différentielle des projections des courbes (γ_1) et (γ_2) sur le plan xOy en remplaçant dans l'équation (4) y' par $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne l'équation

$$(5) \qquad (p^2-1)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (q^2-1)dy^2 = 0.$$

Soit (γ_1') la projection d'une courbe (γ_1) sur le plan des xy ; la droite $I\mu$ est tangente en I à (γ_1'), et comme MM' est tangente en μ à E_{γ_1}, $I\mu$ est normale en μ à cette enveloppe. Donc (γ_1') est la développée plane de E_{γ_1}, (γ_1) est sur la surface polaire de E_{γ_1}, et comme mt rencontre normalement E_{γ_1}, cette courbe admet (γ_1) comme développée, ce qui montre bien que (γ_1) est une hélice[1], comme nous l'avions déjà remarqué.

La courbe Γ, définie sur S par l'équation

$$(6) \qquad p^2 + q^2 - 1 = 0,$$

limite, nous l'avons vu, le domaine d'existence des courbes (γ_1) et (γ_2). Elle se présente analytiquement comme l'intégrale singulière de l'équation (5). Or on tire de (6) avec les notations habituelles

$$(pr + qs)dx + (ps + qt)dy = 0,$$

et on voit sans peine que les surfaces S pour lesquelles Γ satisfait à (5) doivent vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre. Ainsi, en général, Γ est un lieu de points de rebroussement des courbes (γ_1) et (γ_2).

Si une courbe (γ_1) est située dans un plan parallèle à Oz, comme sa tangente doit faire l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec cet axe, elle se réduit nécessairement à une droite inclinée à 45° sur Oz. Les surfaces S_1 de l'énoncé sont donc les surfaces réglées engendrées par une droite qui se déplace en faisant constamment avec Oz l'angle $\frac{\pi}{4}$.

Une telle surface peut être représentée analytiquement par les équations

$$x = z\cos\varphi + \alpha(\varphi), \qquad y = z\sin\varphi + \beta(\varphi),$$

où z et φ jouent le rôle de coordonnées curvilignes. On tire de ces équations

$$p = \frac{z\cos\varphi + \beta'}{z - \alpha'\sin\varphi + \beta'\cos\varphi}, \qquad q = \frac{z\sin\varphi - \alpha'}{z - \alpha'\sin\varphi + \beta'\cos\varphi}.$$

La courbe Γ, d'équation $p^2 + q^2 - 1 = 0$, est alors représentée par l'équation

$$(7) \qquad \alpha'\cos\varphi + \beta'\sin\varphi = 0.$$

---

[1] II, 93.

Si cette équation est vérifiée identiquement, la surface S_1 est développable : c'est une des surfaces exceptionnelles définies au 2°. Si elle n'est pas vérifiée identiquement, elle fournit une ou plusieurs valeurs constantes du paramètre φ : la courbe Γ est alors formée d'une ou plusieurs génératrices rectilignes de S_1.

Reportons-nous à l'équation (5). En coordonnées curvilignes z et φ elle s'écrit

$$2(\alpha' \cos\varphi + \beta' \sin\varphi)dz d\varphi + \left[(\alpha' - z\sin\varphi)^2 + (\beta' + z\cos\varphi)^2\right]d\varphi^2 = 0.$$

On obtient ainsi d'une part la famille de courbes (γ_1) $d\varphi = 0$, formée des génératrices rectilignes de S_1, d'autre part la famille de courbes (γ_2) définie par l'équation différentielle

$$(8) \quad 2(\alpha' \cos\varphi + \beta' \sin\varphi)dz + \left[z^2 - 2z(\alpha' \sin\varphi - \beta' \cos\varphi) + \alpha'^2 + \beta'^2\right]d\varphi = 0,$$

qui est une équation de Riccati. Il est clair que les génératrices rectilignes définies par l'équation (7) satisfont à l'équation (8) : donc dans ce cas la courbe Γ, qui est formée de ces génératrices, est l'enveloppe de la famille (γ_2). On voit de plus que la détermination des courbes (γ_2) n'exigera que des quadratures [1].

4° L'équation (5) peut s'écrire

$$(p dx + q dy)^2 - (dx^2 + dy^2) = 0.$$

Pour que cette équation admette la solution $g_x dx + g_y dy = 0$ il faut et il suffit que l'on ait

$$(9) \qquad p g_y - q g_x = \varepsilon\sqrt{g_x^2 + g_y^2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les surfaces S doivent donc satisfaire à l'une ou l'autre des deux équations ci-dessus, qui sont linéaires et du premier ordre.

Le système différentiel des caractéristiques s'écrit

$$\frac{dx}{g_y} = \frac{-dy}{g_x} = \frac{dz}{\varepsilon\sqrt{g_x^2 + g_y^2}};$$

on a immédiatement l'intégrale $g(x, y) = a$. Tirant alors y de cette relation en fonction de x et de a et portant dans l'équation

$$dz = \frac{\varepsilon\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}{g_y} dx,$$

on achèvera la détermination du système caractéristique par une quadrature.

Tout ceci s'explique aisément par des considérations géométriques. Soient M un point quelconque de l'espace, m sa projection sur le plan des xy, mt la tangente à la courbe (g) qui passe en m ; par hypothèse la surface S qui passe en M contient une courbe (G) qui se projette sur le plan des xy suivant (g), et dont la tangente fait constamment l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec Oz. Si MT est la tangente en M à (G), on voit que MT coïncide avec l'une ou l'autre des droites Δ, Δ' suivant lesquelles le plan Mmt coupe le cône de révolution de sommet M, d'axe

(1) II, 42.

parallèle à Oz et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$. A chaque point M de l'espace correspondent ainsi deux droites Δ, Δ', et le plan tangent en M à une surface S doit contenir l'une ou l'autre de ces droites. Donc les surfaces S sont intégrales d'une équation aux dérivées partielles du 1er ordre qui se décompose en deux équations *linéaires* (1). Soient d'ailleurs $[\alpha(x, y), \beta(x, y), 0]$ les cosinus directeurs de mt; ceux des droites Δ, Δ' seront $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$: le système différentiel des caractéristiques s'écrira donc

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \varepsilon dz,$$

et comme la première équation a pour intégrale générale $g(x, y) = a$, la détermination des caractéristiques n'exigera qu'une quadrature.

Prenons par exemple $g \equiv x^2 + y^2 = C^{te}$. Si l'on passe aux coordonnées polaires

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi,$$

l'équation (9) s'écrit simplement

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\varepsilon\rho,$$

d'où l'on tire

$$z = f(\rho) \pm \rho\varphi,$$

f désignant une fonction arbitraire.

Problème 53.

1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad y = xy'^2 + y'^3, \qquad y' = \frac{dy}{dx}.$$

2° *Trouver le nombre des courbes intégrales réelles qui passent par un point donné du plan d'après la position de ce point dans le plan.*

3° *Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M_0 pour lequel l'équation* (E) *a une racine double en y', quand on remplace x et y par x_0, y_0 respectivement. Indiquer la forme des courbes intégrales qui passent par le point M_0 dans le voisinage de ce point.*

4° *Donner les formules qui représentent paramétriquement les courbes intégrales passant par le point de coordonnées $x = 1$, $y = 0$.*

(*Paris, juillet* 1929, *épr. écr. : 2e quest.*)

1° Pour intégrer l'équation

$$F(x, y, y') \equiv xy'^2 + y'^3 - y = 0,$$

(1) II, 226.

nous formons le système [1]

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=-\frac{F_y dy'}{F_x+y'F_y},$$

qui s'écrit ici
$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=-\frac{2x+3y'}{y'-1}dy'.$$

On en tire l'équation linéaire

$$(y'-1)\frac{dx}{dy'}+2x+3y'=0,$$

qui s'intègre aisément et donne, si l'on pose $y'=t$,

$$x=\frac{A}{(t-1)^2}-t-\frac{1}{2}.$$

L'équation (E) donne ensuite

$$y=t^2(x+t)=\frac{At^2}{(t-1)^2}-\frac{t^2}{2}.$$

La courbe intégrale générale est donc représentée paramétriquement par les équations

(1) $$x=\frac{A}{(t-1)^2}-t-\frac{1}{2},\qquad y=\frac{At^2}{(t-1)^2}-\frac{t^2}{2}.$$

C'est une quartique unicursale.

Cherchons s'il existe des intégrales singulières. Sur une telle intégrale y' doit être une racine double de l'équation $F=0$, ce qui éxige

$$y'=0\qquad\text{ou}\qquad y'=-\frac{2x}{3}.$$

A ces valeurs correspondent, d'après l'équation (E), la droite $y=0$ qui est une intégrale, et la cubique $y=\frac{4x^3}{27}$ qui n'est pas une intégrale. Il n'y a donc qu'une seule intégrale singulière, l'axe des x, enveloppe des courbes intégrales générales: la courbe définie par les équations (1) est en effet tangente à l'axe des x au point $A\left(-\frac{1}{2},\,0\right)$. La cubique $y=\frac{4x^3}{27}$ est un lieu de points de rebroussement des courbes intégrales.

2° Le nombre des courbes intégrales réelles qui passent par un point donné $(x_0,\,y_0)$ est égal au nombre des racines réelles de l'équation

(2) $$t^3+t^2x_0-y_0=0.$$

Posons $\quad u=t^3+t^2x_0-y_0,\quad$ d'où $\quad\frac{du}{dt}=t(3t+2x_0).$

Les extrema de u correspondent à

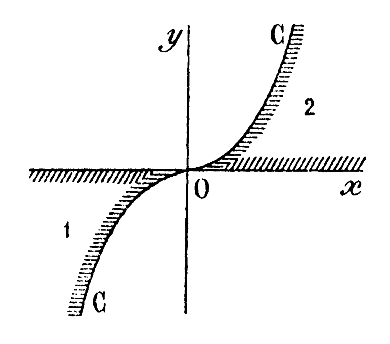
$$t_1=0\qquad\text{et}\qquad t_2=-\frac{2x_0}{3},$$

d'où l'on tire
$$u_1=-y_0\qquad u_2=\frac{4x_0^3}{27}-y_0,$$

---

[1] II, 30.

et pour que l'équation (2) ait trois racines réelles il faut et il suffit que u_1 et u_2 soient de signes contraires, ce qui exige



$$y_0\left(y_0 - \frac{4x_0^3}{27}\right) < 0.$$

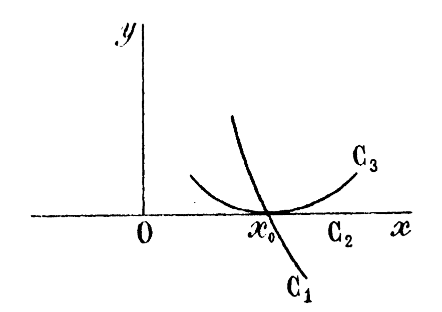
Si nous traçons dans le plan xy la cubique C,

$$y = \frac{4x^3}{27},$$

nous voyons sur la figure ci-dessus que par tout point $M(x_0, y_0)$ situé dans l'une des régions 1 ou 2 passent trois courbes intégrales réelles et à tangentes distinctes, tandis que par tout point extérieur à ces régions passe une courbe intégrale réelle et une seule.

3° Etudions maintenant les courbes intégrales au voisinage des lignes séparatives, axe des x ou cubique C.

Soit d'abord $(x_0, 0)$ un point de l'axe des x. L'équation (2) admet la racine simple $t_1 = y_1' = -x_0$ et la racine double $t_2 = 0$. A la première correspond une courbe intégrale C_1 pour laquelle le point considéré est un point ordinaire ; à la seconde vont correspondre deux courbes intégrales C_2 et C_3 dont l'une C_2 n'est autre que l'axe des x, qui est tangent à C_3 au point $(x_0, 0)$; en dérivant deux fois l'équation (E) et faisant $x = x_0$, $y = 0$, $y' = 0$, on trouve d'ailleurs



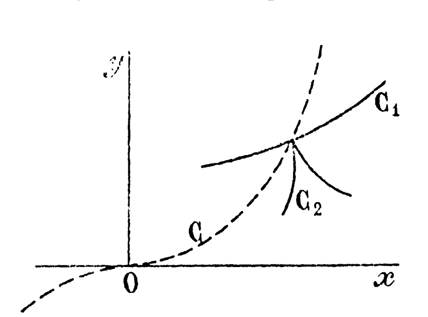
$$y'' - 2x_0 y''^2 = 0,$$

d'où $\qquad y_2'' = 0, \qquad y_3'' = \frac{1}{2x_0}.$

Au voisinage d'un point de l'axe Ox, les courbes intégrales ont donc la disposition ci-contre.

Soit en second lieu $\left(x_0, \frac{4x_0^3}{27}\right)$ un point de C. L'équation (2) admet la racine simple $t_1 = y_1' = \frac{x_0}{3}$ et la racine double $t_2 = y_2' = -\frac{2x_0}{3}$

A la première correspond une courbe intégrale C_1 pour laquelle le point considéré est un point ordinaire, à la seconde une courbe intégrale C_2 qui aura en ce point un rebroussement à condition que y_2' ne soit pas le coefficient angulaire de la tangente à C au même point. Laissant de côté pour le moment ce cas particulier nous voyons que les courbes intégrales qui passent en un point de C ont la disposition ci-contre.



Reportons-nous aux équations (1), et cherchons à déterminer la constante A de telle sorte que pour $t = -\frac{2x_0}{3}$, on ait

$x = x_0,\ y = y_0 = \frac{4x_0^3}{27}$. On trouve

$$A = \frac{(2x_0 + 3)^3}{54}.$$

Si l'on pose alors
$$t + \frac{2x_0}{3} = u,$$

on obtient alors, au voisinage du point considéré, à partir des équations (1), les développements

$$x = x_0 + \frac{9}{2(2x_0 + 3)} u^2 + \cdots, \qquad y = y_0 - \frac{3x_0}{2x_0 + 3} u^2 + \cdots,$$

qui montrent bien que le point (x_0, y_0) de C est un point de rebroussement de C_2.

Observons que ces développements n'ont plus de sens pour $2x_0 + 3 = 0$. En ce point de C on a

$$x_0 = -\frac{3}{2}, \qquad y_0 = -\frac{1}{2}, \qquad y' = 1 = -\frac{2x_0}{3} = y'_2;$$

c'est le cas exceptionnel écarté tout à l'heure. Il correspond à l'hypothèse $A = 0$: les équations (1) montrent que C_2 se réduit dans ce cas à une parabole tangente au point $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ à la cubique C.

Enfin il reste à étudier les courbes intégrales passant par l'origine au voisinage de ce point. On a d'abord l'axe des x ; puis on voit sur les équations (1) que la seule courbe intégrale passant par l'origine correspond à $A = \frac{1}{2}$, et le paramètre t prend en ce point la valeur 0 : on obtient alors pour x et y au voisinage de ce point les développements

$$x = \frac{3}{2} t^2 + \cdots, \qquad y = t^3 + \cdots,$$

ce qui montre que la courbe intégrale considérée a un rebroussement en ce point.

4° Si l'on se reporte au début du 3°, on voit que les deux courbes intégrales C_1 et C_3 qui passent au point (1, 0) sont telles que sur la première ce point corresponde à la valeur $t = -1$, et sur la seconde à $t = 0$. Il en résulte immédiatement que ces courbes sont représentées paramétriquement par les équations (1), où l'on fait $A = 2$ pour C_1 et $A = \frac{3}{2}$ pour C_3. La courbe C_3 est d'ailleurs, comme on l'a vu, tangente au point (1, 0) à l'intégrale singulière $y = 0$.

Problème 54.

1° *Montrer que l'expression*

$$A dx + B dy = \frac{(y^3 - y^2 - 2y)dx + [-xy^2 + (y^2 + 2xy - 2x^2) + 2x]dy}{y^4 + (x^2 - 6x + 1)y^2 - 2x(x - 1)y + 5x^2}$$

est une différentielle totale exacte dU.

On vérifiera que l'on peut prendre $U = \text{Arc tg}\,\frac{P}{Q}$, P *et* Q *désignant des polynomes en* x *et* y, *de degrés respectifs* 2 *et* 1 *en* y.

2° *Quels points* (α, β) *du plan le chemin* C *doit-il éviter pour que l'intégrale* $\int_C A\,dx + B\,dy$ *ait un sens?*

3° *Si* C *est un contour simple fermé parcouru dans le sens direct, quelle est la valeur de l'intégrale précédente?*

Traiter d'abord les cas où C *est un petit cercle de centre* (α, β).

4° *Soient les points* $N(-1, -1)$ *et* $N'(3, 3)$. *Calculer*

$$\int_N^{N'} A\,dx + B\,dy,$$

le chemin d'intégration étant le demi-cercle de diamètre NN′ *coupant la partie positive de l'axe des* x.

Même question avec les points $N(1-\rho, 1-\rho)$ *et* $N'(1+\rho, 1+\rho)$, $(\rho > 1)$.

(*Paris, juillet* 1929, *épr. prat.*)

1° La fonction $U(x, y)$, si elle existe, doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A = \frac{y^3 - y^2 - 2y}{x^2(y^2 - 2y + 5) - 2x(3y^2 - y) + y^4 + y^2}.$$

Le dénominateur du second membre est un trinome du second degré en x dont le discriminant est égal à $-4(y^3 - y^2 - 2y)^2$; on intégrera donc au moyen d'un arc tg, et l'on aura ainsi

$$U = \text{arc tg}\,\frac{x(y^2 - 2y + 5) - 3y^2 + y}{y^3 - y^2 - 2y} + \varphi(y).$$

Si l'on peut maintenant déterminer la fonction φ, dépendant de la seule variable y, de telle sorte que $\frac{\partial U}{\partial y} = B$, l'expression $A\,dx + B\,dy$ sera bien une différentielle totale dU, et pour avoir U on n'aura à effectuer que la seule quadrature qui donne $\varphi(y)$ [1]. Le calcul est un peu long, mais facile ; on trouve finalement

$$\varphi'(y) = \frac{-2}{y^2 - 2y + 5}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = -\text{arc tg}\,\frac{y-1}{2},$$

et par suite $U = \text{arc tg}\,\frac{x(y^2 - 2y + 5) - 3y^2 + y}{y^3 - y^2 - 2y} - \text{arc tg}\,\frac{y-1}{2}$.

Appliquant la formule classique $\text{arc tg}\,a - \text{arc tg}\,b = \text{arc tg}\,\frac{a-b}{1+ab}$, on obtient

$$U = \text{arc tg}\,\frac{2x - y^2}{x(y-1) - y} \text{ [2]}.$$

---

(1) I, 94.

(2) A titre d'exercice, on reprendra le calcul en posant $P = X_0 y^2 + 2X_1 y + X_2$, $Q = X_3 y + X_4$, les X_i désignant des polynomes en x. On portera ces valeurs dans la relation $\frac{Q\,dP - P\,dQ}{P^2 + Q^2} = A\,dx + B\,dy$, et on en déduira les X_i par un calcul d'identification.

2° Les points (α, β) demandés sont évidemment ceux pour lesquels U cesse d'avoir un sens : ce sont les points communs aux deux coniques

$$(\mathrm{P}) \quad 2x - y^2 = 0, \qquad (\mathrm{H}) \quad x(y-1) - y = 0.$$

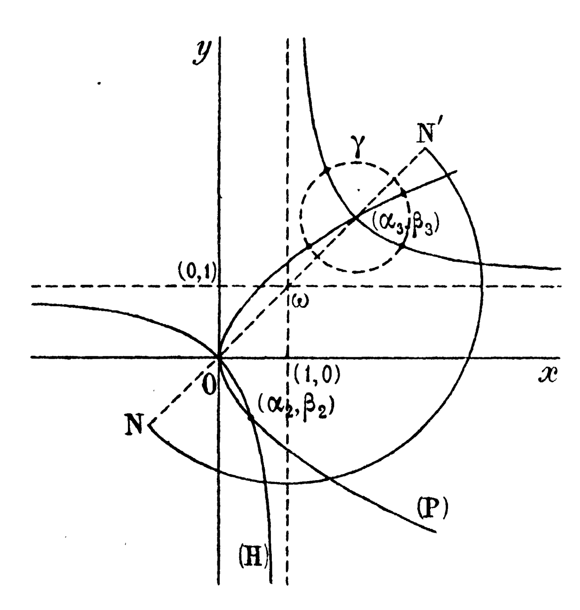
Comme ces coniques ont une direction asymptotique commune, l'axe Ox, il reste trois points d'intersection à distance finie

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ \beta_2 = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = 2, \\ \beta_3 = 2. \end{cases}$$

3° Posons $\qquad \mathrm{X} = x(y-1) - y, \qquad \mathrm{Y} = 2x - y^2;$

ces équations, où l'on considère X et Y comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires, établissent une correspondance point par point entre les plans (x, y) et (X, Y). Cette correspondance n'est pas biunivoque ; à chaque point du plan (x, y) correspond bien un point et un seul du plan (X, Y), mais la réciproque n'est pas vraie, puisque, par exemple, aux trois points (α_i, β_i) correspond l'origine des axes de coordonnées dans le plan (X, Y). A un contour simple fermé du plan (x, y) correspond, dans le plan (X, Y), un contour fermé qui n'est pas nécessairement simple.

Ceci posé, traçons dans le plan (x, y) la parabole (P) et l'hyperbole (H). Il leur correspond dans le plan (X, Y) l'axe des X et l'axe des Y respectivement. Considérons un petit cercle γ entourant l'un des points d'intersection, par exemple (α_3, β_3) ; il lui correspondra un contour fermé Γ dans le plan (X, Y), et comme γ coupe alternativement chacune des courbes (P) et (H) en deux points, Γ coupe alternativement chacun des axes de coordonnées en deux points, autrement dit Γ entoure une fois l'origine. Donc quand le point $m(x, y)$ tourne une fois autour de l'un des points (α_i, β_i), la fonction $\mathrm{U} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$ varie de 2π.



On a d'ailleurs $\qquad \Delta = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\mathrm{D}(x, y)} = -2[y(y-1) + x - 1];$

Δ est positif au voisinage de (α_1, β_1), négatif au voisinage de (α_2, β_2) et (α_3, β_3). Donc [1] la variation de U est $+2\pi$ quand m tourne dans le sens direct autour

[1] I, 115.

de (α_1, β_1), et -2π quand m tourne dans le sens direct autour de (α_2, β_2) ou (α_3, β_3). Au premier point correspond la période polaire 2π, aux deux autres la période -2π.

La valeur de l'intégrale $\int_C A dx + B dy$ prise dans le sens direct le long d'un contour simple fermé C est alors égale[1] à la somme des périodes relatives aux points (α_i, β_i) situés à l'intérieur de C.

4° Le cercle de diamètre NN′ a pour centre le point $\omega(1, 1)$, centre de (H), et aux points N et N′ correspond dans le plan (X, Y) un seul point $I(3, -3)$. Quand le point $m(x, y)$ décrit le demi-cercle situé au-dessous de NN′, il rencontre d'abord (H), puis (P), puis (H) et enfin (P); donc le point M(X, Y) partant de I rencontre d'abord OY, puis OX, puis OY, enfin OX et revient en I : il tourne autour de O dans le sens rétrograde, et la valeur de l'intégrale est -2π.

Si l'on prend le demi-cercle de diamètre $NN'[N(1-\rho, 1-\rho), N'(1+\rho, 1+\rho)]$, avec $\rho > 1$, on voit que si $\rho > \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$ la conclusion précédente subsiste, l'ordre des intersections restant le même. Si $\rho = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$, le demi-cercle passe par le point (α_2, β_2) et l'intégrale n'a plus de sens. Enfin si $1 < \rho < \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$, le point $m(x, y)$ rencontre d'abord (P), puis (H), puis à nouveau (H) et enfin (P); le point M(X, Y), partant du point $I(\rho^2 - 1, 1 - \rho^2)$ pour y revenir, coupe d'abord OX, puis OY, puis à nouveau OY, et enfin OX; donc il ne tourne pas autour de l'origine, et l'intégrale est nulle.

Problème 55.

On donne l'équation aux dérivées partielles

(1) $$z^2pq - xy = a \quad \text{ou} \quad F(x, y, z, p, q) = a.$$

x et y sont les variables indépendantes, z est la fonction inconnue. On a posé $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; a est indépendant des variables précédentes.

1° La détermination des fonctions $G(x, y, z, p, q)$ telles que, pour toute valeur constante de b, l'équation

(2) $$G = b$$

jointe à (1) donne une équation intégrable

(3) $$dz = p dx + q dy$$

équivaut à l'intégration d'un système d'équations différentielles (4) que l'on écrira.

Montrer que G admet les trois valeurs suivantes :

$$p^2z^2 - y^2, \qquad q^2z^2 - x^2, \qquad pxz - qyz.$$

---

(1) I, 71.

Pour chacune de ces trois déterminations de G, déduire des équations (1), (2) *et* (3) *une intégrale complète*

$$(5) \qquad V(x, y, z, a, b, c) = 0$$

de l'équation (1), *où b et c sont des constantes arbitraires.*

2° *Mettre en évidence les combinaisons des équations* (4) *qui donnent chacune des solutions indiquées pour* G.

3° *Chercher la surface intégrale de* (1) *passant par la courbe*

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ indépendants de } x \text{ et } y).$$

On étudiera d'abord le cas particulier $a = 0$.

4° *Déduire de la relation* (5) *l'intégrale complète de l'équation* (2) *où b a une valeur indépendante de* x, y, z, p, q.

De quelle équation

$$H(x, y, z, p, q) = c$$

la relation (5) *donne-t-elle une intégrale complète quand on y fait varier a et b, laissant c fixe?* (*Paris, oct.* 1929, *épr. écr.*)

1° et 2°. Le système différentiel (4) n'est autre que le système qui définit les caractéristiques de l'équation (1); il s'écrit donc

$$(4) \qquad \frac{dx}{z^2q} = \frac{dy}{z^2p} = \frac{dz}{2z^2pq} = \frac{dp}{y - 2zp^2q} = \frac{dq}{x - 2zpq^2}.$$

On met facilement en évidence les combinaisons des équations (4) qui conduisent aux solutions

$$p^2z^2 - y^2, \qquad q^2z^2 - x^2, \qquad pxz - qyz$$

indiquées par l'énoncé. Pour la première, par exemple, il suffit de remplacer, dans l'expression

$$pz^2dp + p^2zdz - ydy,$$

dp, dz, dy par les valeurs proportionnelles tirées de (4) pour avoir un résultat identiquement nul. De même pour les deux autres. Remarquons d'ailleurs que ces trois solutions ne sont pas indépendantes, en raison de l'identité

$$(pxz - qyz)^2 \equiv (z^2pq - xy)^2 - (p^2z^2 - y^2)(q^2z^2 - x^2).$$

Considérons le système intégrable

$$z^2pq - xy = a, \qquad p^2z^2 - y^2 = b;$$

nous poserons

$$pz + y = b \operatorname{tg} \varphi, \qquad pz - y = \cot \varphi,$$

d'où

$$pz = \frac{b \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi}, \qquad y = \frac{b \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$qz = \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi + x(b \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{b \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}.$$

On a en outre
$$dy = \frac{b \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

et l'équation (3) s'écrit alors, avec les variables z, x et φ,

$$zdz = \frac{b \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} dx + \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi + x(b \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

ou encore

$$2zdz = (b \operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi)dx + x\left(\frac{b}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right)d\varphi + \frac{2a}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi ;$$

on en tire finalement

(6) $$x(b \operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi) - z^2 + a \log \operatorname{tg}^2 \varphi + c = 0.$$

Cette équation, où φ est une fonction de y et b définie par la relation implicite

(7) $$b \sin^2 \varphi - 2y \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \varphi = 0,$$

représente une intégrale complète de l'équation (1).

En partant du système

$$z^2pq - xy = a, \qquad q^2z^2 - x^2 = b,$$

on obtiendrait de même l'intégrale complète

$$y(b \operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi) - z^2 + a \log \operatorname{tg}^2 \varphi + c = 0,$$

φ désignant cette fois une fonction de x et b définie par la relation

$$b \sin^2 \varphi - 2x \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \varphi = 0.$$

Considérons enfin le système

$$z^2pq - xy = a, \qquad z(px - qy) = b,$$

et intégrons d'abord la seconde équation, qui est linéaire ; le système caractéristique s'écrit

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{b},$$

et l'on a immédiatement les deux combinaisons intégrables

$$ydx + xdy = 0, \qquad \frac{2zdz}{b} = \frac{ydx - xdy}{yx} = d \log \frac{x}{y},$$

d'où l'on déduit l'intégrale générale

$$z^2 = b \log \frac{x}{y} + \varphi(xy),$$

φ désignant une fonction arbitraire. On en tire

$$2pz = \frac{b}{x} + y\varphi', \qquad 2qz = -\frac{b}{y} + x\varphi',$$

d'où, en portant dans l'équation (1) et posant $xy = t$,

$$t\varphi'^2 = 4(t+a) + \frac{b^2}{t}, \qquad \varphi(t) = \varepsilon \int \frac{\sqrt{4t^2+4at+b^2}}{t}\,dt.$$

Posons, suivant la méthode classique,

$$\varepsilon\sqrt{4t^2+4at+b^2} = 2t+u, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{u^2-b^2}{4(a-u)};$$

on trouve $$\varphi = \frac{u}{2} + a\log\frac{1}{a-u} + b\log\frac{u-b}{u+b} + \frac{a^2-b^2}{2(a-u)} + \mathrm{C^{te}},$$

et l'on obtient finalement, pour l'intégrale complète, l'équation

$$z^2 = b\log\frac{x}{y} + a\log\left(2t+a+\varepsilon\sqrt{\ }\right) + b\log\frac{\varepsilon\sqrt{\ }-2t-b}{\varepsilon\sqrt{\ }-2t+b} + \varepsilon\sqrt{\ } + c.$$

où l'on a posé $\varepsilon = \pm 1, \quad t = xy, \quad \sqrt{\ } = \sqrt{4t^2+4at+b^2}$.

3° Dans les équations (6) et (7) posons $\operatorname{tg}\varphi = t$; nous aurons une intégrale complète de (1) définie par les équations

$$(8) \qquad x\left(bt+\frac{1}{t}\right) - z^2 + 2a\log t + c = 0,$$

$$(9) \qquad bt^2 - 2yt - 1 = 0.$$

Nous partirons de cette intégrale complète pour déterminer la surface intégrale qui contient l'ellipse représentée paramétriquement par les équations

$$x = \alpha\cos\theta, \qquad y = \beta\sin\theta, \qquad z = 0.$$

Portons ces valeurs de x, y, z dans les équations (8) et (9); nous aurons

$$(10) \qquad \alpha\left(bt+\frac{1}{t}\right)\cos\theta + 2a\log t + c = 0, \qquad bt^2 - 2\beta t\sin\theta - 1 = 0.$$

D'après la méthode générale (¹), il faut dériver la première équation par rapport à θ, en remarquant que la seconde définit t comme une fonction de θ; on a ainsi

$$(11) \qquad -\alpha\left(bt+\frac{1}{t}\right)\sin\theta + \left[\alpha\left(b-\frac{1}{t^2}\right)\cos\theta + \frac{2a}{t}\right]\frac{dt}{d\theta} = 0,$$

avec $$t = \frac{\beta\sin\theta + \varepsilon\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+b}}{b}, \qquad \frac{1}{t}\frac{dt}{d\theta} = \frac{\beta\cos\theta}{\varepsilon\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+b}}.$$

La première équation (10) et l'équation (11) s'écrivent alors, toutes réductions faites,

$$(12) \qquad \begin{cases} a\beta\cos\theta - b\alpha\sin\theta + \alpha\beta^2\sin\theta\cos 2\theta = 0, \\ 2\varepsilon\alpha\cos\theta\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+b} + 2a\log\dfrac{\beta\sin\theta+\varepsilon\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+b}}{b} + c = 0; \end{cases}$$

(¹) II, 242.

l'élimination de θ entre ces deux équations donne la relation entre b et c qui définit, par l'intermédiaire des équations (8) et (9), les ∞^1 surfaces intégrales dont l'enveloppe sera la surface cherchée.

Éliminons t entre les équations (8) et (9); on aura l'équation de l'intégrale complète sous la forme

$$(13) \qquad 2\varepsilon x\sqrt{y^2+b} - z^2 - 2a\log\left(\varepsilon\sqrt{y^2+b} - y\right) + c = 0,$$

et il est clair qu'il suffira de considérer, dans cette dernière équation, b et c comme des fonctions du paramètre θ définies par les équations (12), qui donnent

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} b &= \beta^2\cos 2\theta + a\frac{\beta}{\alpha}\cot\theta, \\ c &= 2a\log\left(\varepsilon\sqrt{\beta^2\cos^2\theta + a\frac{\beta}{\alpha}\cot\theta} - \beta\sin\theta\right) \\ &\qquad - 2\varepsilon\alpha\cos\theta\sqrt{\beta^2\cos^2\theta + a\frac{\beta}{\alpha}\cot\theta}\,; \end{aligned} \right.$$

il n'y a plus en définitive qu'à chercher l'enveloppe des ∞^1 surfaces représentées par l'équation (13), où b et c sont des fonctions du paramètre θ définies par les équations (14). En dérivant (13) par rapport à θ on a la nouvelle équation

$$(15) \qquad \left(\frac{\varepsilon x}{\sqrt{y^2+b}} - \frac{a}{y^2+b-\varepsilon y\sqrt{y^2+b}}\right)\frac{db}{d\theta} + \frac{dc}{d\theta} = 0,$$

et on obtiendra une représentation paramétrique de la surface cherchée au moyen des variables y et θ en résolvant par rapport à x et z les équations (13) et (15), b et c étant toujours définies par (14).

Nous effectuerons complètement les calculs dans le cas particulier où $a = 0$. Les équations (13), (14) et (15) s'écrivent alors

$$(16) \qquad \begin{gathered} 2\varepsilon x\sqrt{y^2+b} - z^2 + c = 0, \\ b = \beta^2\cos 2\theta, \qquad c = 2\varepsilon'\alpha\beta\cos^2\theta, \\ \varepsilon\beta\frac{x}{\sqrt{y^2+b}}\sin 2\theta + \varepsilon'\alpha\sin 2\theta = 0. \end{gathered}$$

On vérifie immédiatement que l'hypothèse $\sin 2\theta = 0$ ne fournit pas de solution; la dernière équation donne donc

$$\varepsilon\sqrt{y^2+b} = -\varepsilon'\frac{\beta}{\alpha}x, \qquad \text{d'où} \qquad b = \frac{\beta^2x^2 - \alpha^2y^2}{\alpha^2},$$

et l'on tire des deux précédentes, par l'élimination de θ,

$$c = \varepsilon'\frac{\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha\beta};$$

portant ces valeurs de b et c dans l'équation (16), on a, pour la surface cherchée, l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\pm\frac{z^2}{\alpha\beta}-1=0.$$

Cette équation représente un ellipsoïde et un hyperboloïde à une nappe qui coupent tous deux le plan $z=0$ suivant l'ellipse donnée.

4° Pour tout système de valeurs des constantes a, b, c, l'équation (5) représente une surface intégrale des équations (1) et (2). Si donc on donne à b une valeur déterminée, l'équation (2) correspondante admettra pour intégrale complète la congruence des surfaces représentées par l'équation (5) où l'on considérera a et c comme des constantes arbitraires.

Donnons à c, dans l'équation (5), une valeur bien déterminée, c_0. Pour tout système de valeurs données aux constantes a, b, l'équation

$$V(x, y, z, a, b, c_0)=0$$

représente une surface Σ_{ab} en tout point de laquelle on a

$$F(x, y, z, p, q)=a, \qquad G(x, y, z, p, q)=b;$$

donc la surface Σ_{ab} satisfait à l'équation

$$V(x, y, z, F, G, c_0)=0.$$

Autrement dit l'équation (5), où l'on fait varier a et b en laissant c fixe, représente une intégrale complète de l'équation

$$V(x, y, z, F, G, c)=0\,(^1).$$

Problème 56.

Les axes Oxyz sont rectangulaires. On considère les points M_1 *et* M_2 *dont les coordonnées sont*

$$M_1\begin{cases}x=4u,\\ y=0,\\ z=2u^2-1,\end{cases}\qquad M_2\begin{cases}x=0,\\ y=4v,\\ z=-2v^2+1.\end{cases}$$

1° *Équation du plan* P *perpendiculaire au segment* M_1M_2 *en son milieu.*

2° *Lorsque u et v varient indépendamment l'un de l'autre, le plan* P *enveloppe une surface* S. *Exprimer en fonction de u et de v les coordonnées du point* M *où* P *touche* S.

3° *Déterminer les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de* S. *Ont-elles des propriétés géométriques remarquables ?*

(*Paris, oct.* 1929, *épr. prat.*)

---

(1) On pourra, à titre d'exercice, reprendre tous les calculs en faisant d'abord, dans l'équation (1), le changement de variable $z^2=2Z$.

1° Les composantes du vecteur $\mathbf{M_1M_2}$ sont proportionnelles à

$$2u, \qquad -2v, \qquad u^2+v^2-1,$$

et les coordonnées du milieu de M_1M_2 sont $(2u,\ 2v,\ u^2-v^2)$. L'équation du plan P s'écrit donc

$$2u(x-2u)-2v(y-2v)+(u^2+v^2-1)(z-u^2+v^2)=0,$$

ou encore

$$(1) \qquad 2ux-2vy+(u^2+v^2-1)z-u^4-3u^2+v^4+3v^2=0.$$

2° Les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ du point M où P touche son enveloppe S satisfont à l'équation (1) et aux équations que l'on en déduit en la dérivant successivement par rapport à u et v, c'est-à-dire

$$(2) \qquad x+uz-2u^3-3u=0,$$

$$(3) \qquad y-vz-2v^3-3v=0.$$

En résolvant le système (1), (2), (3), on aura les équations paramétriques de S,

$$(4) \qquad x=3u+3uv^2-u^3, \qquad y=3v+3u^2v-v^3, \qquad z=3(u^2-v^2).$$

3° Calculons les coefficients E, F, G, E', F', G' des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S. On trouve

$$E=G=9(1+u^2+v^2)^2, \qquad F=0, \qquad E'=6, \qquad F'=0, \qquad G'=-6.$$

Les relations $F=0$, $F'=0$ montrent d'abord que le réseau des lignes coordonnées $u=C^{te}$, $v=C^{te}$ forme les deux familles de lignes de courbure. L'équation aux asymptotiques s'écrit d'autre part

$$du^2-dv^2=0, \qquad \text{d'où} \qquad u\pm v=C^{te}.$$

L'équation (2), qui est vérifiée par les coordonnées de tout point de S, montre que les courbes $u=C^{te}$ sont situées dans des plans parallèles à l'axe Oy. De même les lignes $v=C^{te}$ sont situées, d'après (3), dans des plans parallèles à l'axe Ox. Donc les lignes de courbure sont des courbes algébriques planes. On voit, sur les équations (4), que ce sont des cubiques unicursales.

Les mêmes équations montrent que les asymptotiques $(u\pm v=C^{te})$ sont aussi des cubiques unicursales, mais ce ne sont pas, en général, des courbes planes (exception faite des droites de S, par exemple $z=x+y=0$ et $z=x-y=0$). Nous allons montrer que ce sont des hélices.

Considérons par exemple l'asymptotique $u+v=\alpha$. Son plan osculateur est le plan P défini par l'équation (1), et il suffira d'établir que tout le long de l'asymptotique la normale à P fait un angle constant avec une direction fixe [1]. Or cette normale a pour cosinus directeurs

$$\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \qquad \frac{-2v}{u^2+v^2+1}, \qquad \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2u}{2u^2-2\alpha u+\alpha^2+1}, \qquad \frac{2(u-\alpha)}{2u^2-2\alpha u+\alpha^2+1}, \qquad \frac{2u^2-2\alpha u+\alpha^2-1}{2u^2-2\alpha u+\alpha^2+1}$$

[1] II, 79.

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs d'une direction fixe, V un angle constant. En identifiant par rapport à u les deux membres de la relation

$$2\lambda u + 2\mu(u - \alpha) + \nu(2u^2 - 2\alpha u + \alpha^2 - 1) = (2u^2 - 2\alpha u + \alpha^2 + 1)\cos V$$

et tenant compte de l'égalité $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, on trouve

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}, \qquad \mu = \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}, \qquad \nu = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2}} = \cos V.$$

L'asymptotique $u + v = \alpha$ est donc bien une hélice, sa binormale faisant l'angle constant V avec la droite fixe de cosinus directeurs (λ, μ, ν).

Remarque. — La surface S est dite surface d'Enneper. On pourra vérifier que c'est une surface minima.

Problème 57.

On considère la courbe C *définie par les équations paramétriques*

$$x = \sin u, \qquad y = \frac{1}{2}\cos^2 u, \qquad z = \cos u,$$

les axes Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires. Sur cette courbe on choisit le point* A, *de paramètre* $u = 0$, *pour origine des abscisses curvilignes, et le sens des* u *croissants pour sens positif.*

1° *Calculer les cosinus directeurs* α, β, γ *de la demi-tangente positive* Mt *à* C *au point* M *de paramètre* u, *former l'équation du plan osculateur, calculer les cosinus directeurs* α_1, β_1, γ_1 *de la normale principale* Mn, *et le rayon de courbure* R *de la courbe en* M.

2° *Calculer les cosinus directeurs* α_2, β_2, γ_2 *de la binormale* Mb, *et le rayon de torsion* T *en* M.

3° *Par* C *passent : un cylindre de révolution* Γ_y *d'axe* Oy, *un cylindre parabolique* Γ_x *parallèle à* Ox, *un cylindre parabolique* Γ_z *parallèle à* Oz. *En considérant* C *comme l'intersection de deux de ces cylindres, donner, indépendamment des calculs précédents, une* construction géométrique *du plan osculateur et du centre de courbure de* C en A.

4° *Calculer la* torsion géodésique *de* C *sur* Γ_y *au point* M *en fonction des courbures principales de* Γ_y *en* M, *et en déduire la* torsion $\frac{1}{T}$ *de* C *en* M, *indépendamment du calcul direct demandé au* 2°.

(*Paris, juillet* 1930, *épr. écr. :* 1re *quest.*)

1° Tenant compte des conditions initiales indiquées dans l'énoncé, on trouve immédiatement

$$ds = \mathrm{H}du, \qquad \alpha = \frac{\cos u}{\mathrm{H}}, \qquad \beta = -\frac{\sin u \cos u}{\mathrm{H}}, \qquad \gamma = -\frac{\sin u}{\mathrm{H}},$$

avec

$$\mathrm{H} = +\sqrt{1 + \sin^2 u \cos^2 u}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2}{ds^2} + \frac{d\beta^2}{ds^2} + \frac{d\gamma^2}{ds^2} = \left(\frac{d\alpha^2}{du^2} + \frac{d\beta^2}{du^2} + \frac{d\gamma^2}{du^2}\right)\frac{du^2}{ds^2},$$

d'où $R = \dfrac{H^3}{K}$, avec $K = \sqrt{1 + \sin^6 u + \cos^6 u} = \sqrt{2 - 3\sin^2 u \cos^2 u}$.

Des formules $\alpha_1 = R\dfrac{d\alpha}{ds}$, $\beta_1 = R\dfrac{d\beta}{ds}$, $\gamma_1 = R\dfrac{d\gamma}{ds}$, on tire alors

$$\alpha_1 = -\frac{H \sin u + H' \cos u}{K}, \qquad \beta_1 = \frac{H(\sin^2 u - \cos^2 u) + H' \sin u \cos u}{K},$$

$$\gamma_1 = -\frac{H \cos u - H' \sin u}{K},$$

H' désignant la dérivée $\dfrac{dH}{du}$.

Si $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ sont les vecteurs unitaires des arêtes du trièdre de Serret au point M, la relation $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$ donne enfin

$$\alpha_2 = \frac{\sin^3 u}{K}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{K}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\cos^3 u}{K},$$

et l'équation du plan osculateur

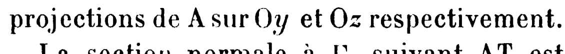
$$\alpha_2(X - x) + \beta_2(Y - y) + \gamma_2(Z - z) = 0$$

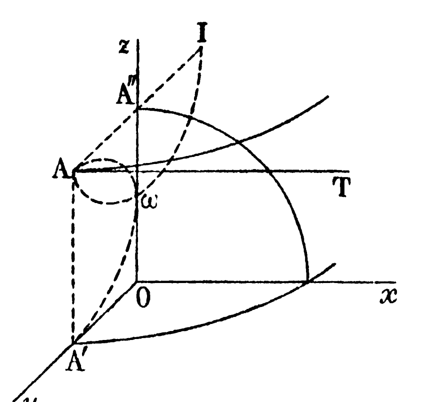
s'écrit
$$X \sin^3 u + Y - Z \cos^3 u + \frac{1}{2}\cos^2 u - \sin^2 u = 0.$$

2° La torsion est ensuite fournie par la relation $\dfrac{db}{ds} = \dfrac{n}{T}$; on trouve

$$T = -\frac{K^2}{3 \sin u \cos u}.$$

3° Le plan tangent à Γ_z au point A est parallèle à Ox, de même le plan tangent à Γ_x ; donc la tangente à C en ce point, soit AT, est parallèle à Ox. Soient A′ et A″ les projections de A sur Oy et Oz respectivement.





La section normale à Γ_y suivant AT est une circonférence de centre A′. Il résulte du théorème de Meusnier que le centre de courbure de C au point A, projection de A′ sur le plan osculateur passant par AT, est sur une circonférence de diamètre AA′.

La section droite du cylindre Γ_z par le plan xOy est la parabole $x^2 + 2y = 1$, de sommet A′ et de foyer O. La section normale à Γ_z suivant AT est donc une parabole de sommet A et de foyer A″ : on sait que le centre de courbure de cette parabole relatif à A est le symétrique I du sommet A par rapport au foyer. Donc le centre de courbure de C au point A est sur la circonférence de diamètre AI.

Ces deux circonférences se coupent visiblement au point $\omega\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ milieu de OA″ : c'est le centre de courbure cherché. Le plan osculateur à C au point A est donc le plan (ω, AT).

4° Prenons les équations paramétriques du cylindre Γ_y sous la forme

$$x = \sin u, \qquad y = v, \qquad z = \cos u\,;$$

les composantes du vecteur unitaire **N** dirigé suivant la normale extérieure seront alors ($\sin u$, 0, $\cos u$), et l'on aura, pour les rayons de courbure principaux au point M, ρ_1 et ρ_2, relatifs aux courbes $v = C^{te}$ et $u = C^{te}$ respectivement, comptés positivement à partir de M dans le sens de **N**,

$$\rho_1 = -1, \qquad \rho_2 = \infty.$$

Sur ce cylindre la courbe C est définie par l'équation $v = \frac{\cos^2 u}{2}$; soient $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ les vecteurs unitaires tangents en M aux courbes coordonnées dans le sens des u et des v croissants, de telle sorte que le trièdre ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, **N**) est direct, ω l'angle de $\mathbf{t}_1$ et du vecteur unitaire $\mathbf{t}$ tangent à C dans le sens positif, compté positivement dans le sens direct autour de **N** à partir de $\mathbf{t}_1$ [1]. On aura

$$\mathbf{t}ds = (\mathbf{t}_1 \cos\omega + \mathbf{t}_2 \sin\omega)ds = \mathbf{t}_1 du + \mathbf{t}_2 dv,$$

d'où
$$\frac{du}{ds} = \cos\omega = \frac{1}{H}, \qquad \frac{dv}{ds} = \sin\omega = \frac{-\sin u \cos u}{H},$$

et par suite, d'après la formule d'O. Bonnet,

$$\frac{1}{T_g} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cos\omega\sin\omega = -\cos\omega\sin\omega = \frac{\sin u\cos u}{H^2}.$$

Soient ensuite $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ les deux autres vecteurs unitaires du trièdre de Serret relatif au point M de C, θ l'angle des deux vecteurs $\mathbf{n}$ et **N** compté positivement dans le sens direct autour de $\mathbf{t}$ à partir de **N**. On a

$$\cos\theta = \mathbf{N}\,.\,\mathbf{n} = \alpha_1 \sin u + \gamma_1 \cos u = -\frac{H}{K},$$

$$\sin\theta = \mathbf{N}\,.\,\mathbf{b} = \alpha_2 \sin u + \gamma_2 \cos u = \frac{\sin^2 u - \cos^2 u}{K}, \qquad \sin\theta\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{H}{K}\right)'\frac{du}{ds},$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{K}{\sin^2 u - \cos^2 u}\left(\frac{H}{K}\right)'\frac{1}{H} = \frac{1}{\sin^2 u - \cos^2 u}\left(\frac{H'}{H} - \frac{K'}{K}\right) = -\frac{5\sin u\cos u}{H^2K^2},$$

et enfin
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_g} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin u\cos u(K^2 - 5)}{H^2K^2} = -\frac{3\sin u\cos u}{K^2}\,;$$

c'est bien la valeur trouvée précédemment.

---

[1] Pour la figure, et pour tout le calcul qui suit, voir *Précis*, II, p. 144-146.

Problème 58.

1° *Une équation différentielle* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ *étant* donnée, *indiquer des opérations* algébriques *et* différentielles *précises permettant de reconnaître si elle admet un facteur intégrant ne dépendant que de* $u = x + y$*; déterminer ce facteur intégrant lorsqu'il existe. On traitera comme application l'équation*

$$(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0,$$

dont on déterminera un facteur intégrant du type précédent et l'intégrale générale.

2° *Déterminer* toutes *les fonctions* $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *telles que l'équation*

$$\text{(E)} \qquad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

admette à la fois un facteur intégrant donné $\lambda(x + y)$ *et un facteur intégrant* donné $\mu(x - y)$. *Quelle est alors l'intégrale générale de l'équation* (E)?

(*Paris, juillet* 1930, *épr. écr.:* 2e *quest.*)

1° Soit $\lambda(x + y)$ le facteur intégrant; on devra avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda P = \frac{\partial}{\partial x}\lambda Q, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (Q - P)\frac{\lambda'}{\lambda} \qquad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{du}\right).$$

On aura donc

$$\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{\lambda'}{\lambda} = \theta(x + y),$$

ce qui exige

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right].$$

Si cette relation est vérifiée, on aura $\theta(x + y) = \theta(u)$ en remplaçant dans l'expression $\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ x par u et y par 0. On aura ensuite

$$\lambda = e^{-\int \theta(u)du}.$$

En prenant $P = 2xy - y^2 - y$ et $Q = 2xy - x^2 - x$, on trouve

$$\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4}{u + 1}, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{1}{(x + y + 1)^4}.$$

L'intégration s'achève alors sans difficulté, et donne

$$\frac{xy}{(x + y + 1)^3} = C^{te}$$

2° Ecrivant que les expressions $\lambda(\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy)$ et $\mu(\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy)$ sont des différentielles totales exactes, on trouve les conditions

$$\frac{1}{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)=-\frac{\lambda'}{\lambda}=\theta(x+y), \qquad \frac{1}{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)=\frac{\mu'}{\mu}=\varphi(x-y).$$

On en tire d'abord $\dfrac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}=\dfrac{\theta}{\varphi}$, et, en posant

$$\mathrm{P}=(\theta+\varphi)\rho(x,y), \qquad \mathrm{Q}=(\theta-\varphi)\rho(x,y),$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation

$$\left(\frac{1}{2\theta}-\frac{1}{2\varphi}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{2\varphi}\right)\frac{\partial\rho}{\partial y}=\rho.$$

Le système différentiel associé s'écrit

$$\frac{dx}{\frac{1}{2\theta}-\frac{1}{2\varphi}}=\frac{dy}{\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{2\varphi}}=\frac{d\rho}{\rho}=(dx+dy)\theta(x+y)=-(dx-dy)\varphi(x-y),$$

ou encore $\qquad \dfrac{d\rho}{\rho}=-\dfrac{\lambda'}{\lambda}du=-\dfrac{\mu'}{\mu}dv, \qquad (u=x+y,\ v=x-y).$

On en tire l'intégrale générale

$$\rho=\frac{1}{\lambda}f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

d'où $\qquad \mathrm{P}=\left(\dfrac{\mu'}{\mu}-\dfrac{\lambda'}{\lambda}\right)\dfrac{1}{\lambda}f\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right), \qquad \mathrm{Q}=-\left(\dfrac{\mu'}{\mu}+\dfrac{\lambda'}{\lambda}\right)\dfrac{1}{\lambda}f\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right),$

f désignant une fonction arbitraire.

D'après les propriétés classiques des facteurs intégrants[1], l'intégrale générale de l'équation (E) s'écrit alors $\dfrac{\lambda}{\mu}=\mathrm{C}^{\text{te}}$.

Problème 59.

1° *Démontrer que l'équation aux dérivées partielles*

(E) $$(z-px-qy)^2=q\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

admet une intégrale complète formée de cônes ayant leurs sommets sur l'axe Oz, *et trouver cette intégrale.*

2° *Quelle est la forme générale des équations du premier ordre*

$$\mathrm{F}(x,y,z,p,q)=0$$

dont les développables caractéristiques sont des cônes ayant leur sommet sur Oz?

3° *Trouver une intégrale de l'équation* (E) *passant par la parabole*

$$y=1, \qquad z+(x-1)^2=0.$$

(*Paris, oct.* 1930, *épr. écr. :* 1*re quest.*)

---

(1) II, p. 33.

1° Appliquons à l'équation (E) la transformation de Legendre (¹)

$$x = \mathrm{P}, \qquad y = \mathrm{Q}, \qquad z = \mathrm{PX} + \mathrm{QY} - \mathrm{Z}, \qquad p = \mathrm{X}, \qquad q = \mathrm{Y};$$

elle s'écrit

$$(\mathrm{E}') \qquad \mathrm{PZ} + \varepsilon \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{Y}} = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

L'équation (E′) est linéaire ; le système différentiel associé

$$\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} = \frac{d\mathrm{Y}}{\varepsilon\sqrt{\mathrm{Y}}} = \frac{d\mathrm{Z}}{0}$$

admet les intégrales

$$\mathrm{Z} = \alpha, \qquad \mathrm{X} = 2\varepsilon\alpha\sqrt{\mathrm{Y}} + \beta;$$

les courbes caractéristiques sont des courbes planes (paraboles) situées dans des plans $\mathrm{Z} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$. Chacune de ces courbes sert de support ponctuel à une multiplicité à deux dimensions, dont l'ensemble forme une intégrale complète de (E′) (²). A ces multiplicités intégrales, dont les points sont situés dans des plans $\mathrm{Z} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ $(\mathrm{P} = 0,\ \mathrm{Q} = 0)$, correspondront des multiplicités intégrales de (E) dont les plans passeront par les différents points de l'axe Oz $(x = 0,\ y = 0)$, c'est-à-dire des cônes ayant leurs sommets sur Oz.

Posons $\varepsilon\sqrt{\mathrm{Y}} = u$; les multiplicités intégrales de (E′) associées aux courbes caractéristiques seront définies par les équations

$$\mathrm{X} = \beta + 2\alpha u, \qquad \mathrm{Y} = u^2, \qquad \mathrm{Z} = \alpha, \qquad \mathrm{P} = uv, \qquad \mathrm{Q} = -\alpha v,$$

où α et β sont deux constantes arbitraires, u et v deux paramètres variables. On en déduit, pour l'équation (E), les multiplicités intégrales définies par les équations

$$x = uv, \qquad y = -\alpha v, \qquad z = uv(\beta + \alpha u) - \alpha, \qquad p = \beta + 2\alpha u, \qquad q = u^2;$$

éliminant u et v entre les trois premières, on a l'équation

$$(1) \qquad \alpha^2 x^2 + y(z - \beta x + \alpha) = 0,$$

qui définit des cônes ayant leurs sommets sur l'axe Oz. C'est l'intégrale complète demandée.

2° Soit $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0$ l'équation transformée de $\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$ par la transformation de Legendre. Pour que les développables caractéristiques de $\mathrm{F} = 0$ soient des cônes ayant leurs sommets sur Oz, il faut et il suffit, d'après ce que nous venons de voir, que l'équation $\Phi = 0$ admette pour courbes caractéristiques des courbes planes situées dans des plans $\mathrm{Z} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

Nous pouvons laisser de côté les équations $\mathrm{F} = 0$ qui sont des équations de Clairaut généralisées (³) ; dans ce cas en effet les développables caractéristiques sont des plans. Ce cas écarté, la fonction **Φ** contient nécessairement l'une des

(¹) II, p. 177.
(²) II, p. 253.
(³) II, p. 253.

variables P ou Q; supposons par exemple $\frac{\partial \Phi}{\partial P} \neq 0$. Alors l'équation $\Phi = 0$ pourra se mettre sous la forme

$$P - \varphi(X, Y, Z, Q) = 0,$$

et le long d'une courbe caractéristique on aura

$$dX = -\frac{dY}{\frac{\partial \varphi}{\partial Q}} = \frac{dZ}{P - Q\frac{\partial \varphi}{\partial Q}}.$$

La condition $dZ = 0$ exige donc que l'on ait *identiquement*

$$\varphi - Q\frac{\partial \varphi}{\partial Q} = 0,$$

c'est-à-dire $$\varphi = Q\theta(X, Y, Z).$$

On voit en définitive que la fonction Φ doit avoir la forme

$$\Phi \equiv \Phi\left(X, Y, Z, \frac{P}{Q}\right).$$

Par suite les équations $F = 0$ demandées sont les équations du type

$$F\left(p, q, px + qy - z, \frac{x}{y}\right) = 0$$

où la combinaison $\frac{x}{y}$ figure effectivement. L'équation (E) rentre bien dans ce type.

3° Le problème de Cauchy relatif à la parabole

(2) $$y = 1, \qquad z + (x-1)^2 = 0$$

se résout par les procédés classiques à partir de l'équation (1). Substituant dans cette équation les valeurs de y et z tirées de (2), on obtient l'équation

$$x^2(\alpha^2 - 1) + x(2 - \beta) + \alpha - 1 = 0;$$

écrivons que cette équation a une racine double :

$$(2-\beta)^2 - 4(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1) = 0.$$

On peut poser $$\alpha = \lambda^2 - 1, \qquad \beta = 2(1 + 2\lambda - \lambda^3),$$

et l'équation (1) s'écrit alors

$$(\lambda^2 - 1)^2x^2 + y\left[z - 2x(1 + 2\lambda - \lambda^3) + \lambda^2 - 1\right] = 0.$$

L'enveloppe de cette famille de cônes à un paramètre donne la surface intégrale demandée. On trouve pour cette surface, en coordonnées curvilignes (x, λ), les équations paramétriques

$$x = x, \qquad y = \frac{2\lambda(\lambda^2-1)x^2}{x(2-3\lambda^2) - \lambda}, \qquad z = x\frac{1+\lambda}{2\lambda}(2 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3) + \frac{1-\lambda^2}{2};$$

la parabole $y = 1$, $z + (x-1)^2 = 0$ est définie sur la surface par l'équation

$$\lambda x + 1 = 0.$$

Problème 60.

1° *On demande la forme générale de la fonction* $f(u, v)$ *des deux variables* u, v *telle que les deux expressions*

$$du + f(u, v)dv, \qquad du - f(u, v)dv,$$

admettent respectivement deux facteurs intégrants μ, μ_1 *dont le produit est égal à l'unité,* $\mu\mu_1 = 1$.

2° *Trouver les expressions générales des trois fonctions* X, Y, Z *des deux variables* u, v *telles que l'on ait identiquement*

$$dX^2 + dY^2 = du^2 + Z^2dv^2.$$

Que peut-on dire des courbes décrites par le point de coordonnées rectangulaires (X, Y) *quand on donne une valeur constante à l'une des variables* u, v?

Y a-t-il quelque réciproque? (*Paris, oct.* 1930, *épr. écr.:* 2ᵉ *quest.*)

1° Les deux fonctions μ et μ_1 étant différentes de zéro, on peut poser

$$\mu = e^{\rho}, \qquad \mu_1 = e^{-\rho},$$

ρ désignant une fonction inconnue de u et v. Écrivant ensuite que les expressions

$$e^{\rho}(du + fdv), \qquad e^{-\rho}(du - fdv),$$

sont des différentielles totales exactes, on a les conditions

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial \rho}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} - f\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

d'où l'on tire
$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial v},$$

ou encore
$$\rho = \operatorname{Log} V, \qquad f = u\frac{V'}{V} + V_1 \qquad \text{avec} \qquad \mu = V,$$

V et V_1 désignant des fonctions arbitraires de la seule variable v. Telle est la forme générale de la fonction $f(u, v)$; on aura alors

$$V[du + f(u, v)dv] = d(uV + \int V_1 V dv), \qquad \frac{1}{V}[du - f(u, v)dv] = d\left(\frac{u}{V} - \int \frac{V_1}{V}dv\right).$$

2° De la relation

$$dX^2 + dY^2 = du^2 + Z^2dv^2$$

on tire successivement

$$dY^2 - Z^2dv^2 = du^2 - dX^2, \qquad \mu(dY + Zdv) = d(u + X),$$

$$\frac{1}{\mu}(dY - Zdv) = d(u - X),$$

d'où, en appliquant les résultats du 1°,

$$Z = Y\frac{V'}{V} + V_1, \qquad u + X = VY + \int V_1 V dv, \qquad u - X = \frac{Y}{V} - \int \frac{V_1}{V} dv,$$

V et V_1 désignant toujours des fonctions arbitraires de v. On en déduit, pour les fonctions X, Y et Z, les expressions générales suivantes :

$$X = \frac{\int V_1 V dv + V^2 \int \frac{V_1}{V} dv + u(V^2 - 1)}{V^2 + 1},$$

(1)
$$Y = \frac{V}{V^2+1}\left[\int\left(\frac{V_1}{V} - V_1 V\right)dv + 2u\right],$$

$$Z = \frac{V'}{V^2+1}\left[\int\left(\frac{V_1}{V} - V_1 V\right)dv + 2u\right] + V_1.$$

Le plan (X, Y) rapporté aux coordonnées curvilignes (u, v) a par hypothèse un dS^2 de la forme

(2)
$$dS^2 = du^2 + Z^2 dv^2.$$

Donc [1] les courbes $v = C^{te}$ sont des géodésiques, c'est-à-dire des droites, et les courbes $u = C^{te}$, qui sont les trajectoires orthogonales de cette famille de droites, forment une famille de courbes parallèles. On voit bien d'ailleurs, sur les formules (1), que X et Y sont linéaires en u, ce qui confirme que les courbes $v = C^{te}$ sont des droites.

Réciproquement si le plan (X, Y) est rapporté à un système de coordonnées curvilignes (u, v) tel que les courbes $v = C^{te}$ forment une famille de droites admettant pour trajectoires orthogonales les courbes $u = C^{te}$, on aura, pour les coefficients E, F, G du dS^2 ($dS^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$) :

α) $F = 0$, puisque les courbes coordonnées forment un réseau orthogonal ;

β) $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, puisque les courbes $v = C^{te}$ sont des géodésiques.

Donc, en remplaçant au besoin u par une fonction convenablement choisie de u, on pourra mettre le dS^2 du plan sous la forme (2).

Problème 61.

On désigne par I_1 *l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

prise le long du segment (0, 1) *de l'axe réel, par* I_2 *la même intégrale prise dans le plan complexe le long d'un arc de cercle passant par les points* 0 *et* 1, *situé au-dessus de l'axe réel, et ayant un rayon supérieur à l'unité.*

---

(1) II, p. 140.

1° *Calculer* I_1 *à* $\frac{1}{20}$ *près. Pour cela, après avoir fait le changement de variable* $x=\frac{1+t}{2}$, *on désignera par* $\frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}$ *le coefficient de dt dans la nouvelle intégrale, et l'on montrera que la fonction* $f(t)$, *développée en série de Mac-Laurin, admet pour fonction majorante* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-t}}$; *on en déduira l'approximation obtenue pour* I_1 *quand on ne conserve que les quatre premiers termes du développement de* $f(t)$.

2° *Calculer* I_2.

(*Paris, oct.* 1930, *épr. prat.*)

1° En faisant le changement de variable indiqué, on trouve

$$I_1=\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{(1-t)(t^2+4t+7)}},\qquad \text{d'où}\qquad f(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+4t+7}}.$$

On a ensuite

$$t^2+4t+7=(t+2+3i)(t+2-3i)=(t-t_1)(t-t_2),$$

avec $|t_1|=|t_2|=\sqrt{7}$, puis

$$\frac{1}{\sqrt{t_1-t}}=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\left(1+\alpha_1\frac{t}{t_1}+\alpha_2\frac{t^2}{t_1^2}+\cdots+\alpha_n\frac{t^n}{t_1^n}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{t_2-t}}=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\left(1-\frac{t}{t_2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\left(1+\alpha_1\frac{t}{t_2}+\alpha_2\frac{t^2}{t_2^2}+\cdots+\alpha_n\frac{t^n}{t_2^n}+\cdots\right),$$

avec

$$\alpha_n=\frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots 2n}.$$

Soit alors β_n le coefficient de t^n dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{t^2+4t+7}}$; on aura

$$\sqrt{t_1t_2}\,\beta_n=\alpha_n\left(\frac{1}{t_1^n}+\frac{1}{t_2^n}\right)+\alpha_1\alpha_{n-1}\left(\frac{1}{t_1^{n-1}t_2}+\frac{1}{t_1t_2^{n-1}}\right)+\cdots,$$

$$\sqrt{7}\,|\beta_n|<\alpha_n\left(\frac{1}{|t_1^n|}+\frac{1}{|t_2^n|}\right)+\alpha_1\alpha_{n-1}\left(\frac{1}{|t_1^{n-1}t_2|}+\frac{1}{|t_1t_2^{n-1}|}\right)+\cdots,$$

$$7^{\frac{n+1}{2}}|\beta_n|<2\alpha_n+2\alpha_1\alpha_{n-1}+\cdots.$$

On a d'ailleurs

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1u+\alpha_2u^2+\cdots+\alpha_nu^n+\cdots,$$

d'où, en élevant au carré et remarquant que le coefficient de u^n dans le développement de $(1-u)^{-1}$ est égal à un,

$$1=2\alpha_n+2\alpha_1\alpha_{n-1}+\cdots,$$

et par suite

$$|\beta_n|<7^{-\frac{n+1}{2}}$$

Et comme on a aussi

$$\frac{1}{\sqrt{7-t}} = 7^{-\frac{1}{2}} + 7^{-1}t + 7^{-\frac{3}{2}}t^2 + \cdots + 7^{-\frac{n+1}{2}}t^n + \cdots,$$

on voit bien que $f(t)$ admet pour fonction majorante $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-t}}$.

Reprenons le développement de $f(t)$,

$$f(t) = \sqrt{2}(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n + \cdots);$$

si nous nous bornons aux quatre premiers termes, nous aurons $f(t)$, dans l'intervalle $(-1, +1)$, avec une erreur inférieure à

$$\sqrt{2}(7^{-\frac{5}{2}}t^4 + 7^{-3}t^5 + \cdots) < \sqrt{2}\, 7^{-\frac{5}{2}}(1 + 7^{-\frac{1}{2}} + \cdots) = \frac{\sqrt{2}}{49(\sqrt{7}-1)} = \varepsilon;$$

d'ailleurs
$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-t}}\,dt = 2\varepsilon\sqrt{2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{3.49},$$

ce qui donne une erreur inférieure à

$$\frac{2(2,64576+1)}{147} < 0,04961;$$

il suffira donc de calculer

$$(1)\qquad \sqrt{2}\left[\beta_0\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} + \beta_1\int_{-1}^{+1}\frac{tdt}{\sqrt{1-t}} + \beta_2\int_{-1}^{+1}\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t}} + \beta_3\int_{-1}^{+1}\frac{t^3dt}{\sqrt{1-t}}\right]$$

avec une erreur inférieure à $\frac{3}{10^4}$.

On trouve

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{7}}, \qquad \beta_1 = -\frac{2}{7\sqrt{7}}, \qquad \beta_2 = \frac{5}{98\sqrt{7}}, \qquad \beta_3 = \frac{1}{343\sqrt{7}},$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\sqrt{2}, \qquad \int_{-1}^{+1}\frac{tdt}{\sqrt{1-t}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{14\sqrt{2}}{15}, \qquad \int_{-1}^{+1}\frac{t^3dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{18\sqrt{2}}{35},$$

ce qui donne pour l'expression (1) la valeur

$$\frac{44626\sqrt{7}}{84035};$$

le coefficient de $\sqrt{7}$ est inférieur à $\frac{3}{5}$, donc en prenant $\sqrt{7} = 2,6458$ on commet une erreur inférieure à $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2.10^4} = \frac{3}{10^5}$; on a alors

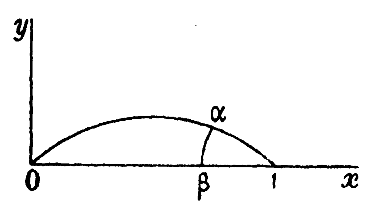
$$\frac{44626 \times 2,6458}{84035} = 1,4050,$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2.10^4}=\frac{5}{10^5}$, ce qui fait sur l'expression (1) une erreur inférieure à $\frac{3}{10^5}+\frac{5}{10^5}=\frac{8}{10^5}$. On a donc en définitive

$$I_1 = 1{,}405,$$

avec une erreur inférieure à $0{,}0497 < \frac{1}{20}$.

2° Il existe deux arcs de cercle de rayon donné supérieur à 1 joignant les points 0 et 1 au-dessus de l'axe réel.



Considérons d'abord un arc qui a son centre au-dessous de l'axe réel, et soit $\alpha\beta$ un petit arc de cercle de centre 1 limité à l'arc d'intégration et à l'axe réel. Posant $\varphi(z)=(1-z^3)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\int_{0\alpha}\varphi(z)dz+\int_{\alpha\beta}+\int_{\beta 0}=0;$$

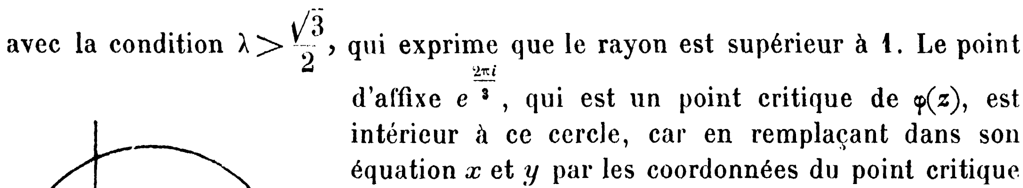
quand le rayon de l'arc $\alpha\beta$ tend vers zéro un raisonnement classique montre qu'il en est de même de $\int_{\alpha\beta}$: on a donc à la limite

$$I_2 = I_1,$$

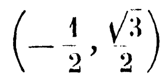
en supposant bien entendu que l'on prenne pour calculer I_2 la détermination de $\varphi(z)$ qui se réduit à $+1$ à l'origine.

Considérons en second lieu un arc qui a son centre au-dessus de l'axe réel ; son équation sera de la forme

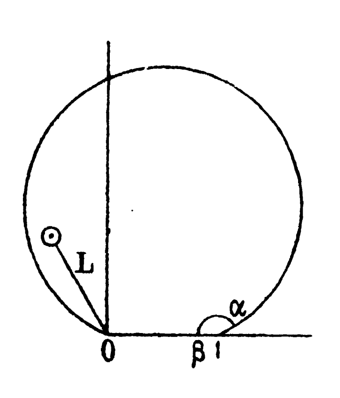
$$x^2+y^2-x-2\lambda y=0,$$



avec la condition $\lambda > \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui exprime que le rayon est supérieur à 1. Le point d'affixe $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, qui est un point critique de $\varphi(z)$, est intérieur à ce cercle, car en remplaçant dans son équation x et y par les coordonnées du point critique



$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



on trouve, compte tenu de l'hypothèse

$$\lambda > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

un résultat négatif. Soit alors L un lacet joignant l'origine au point critique.

Partons de O avec la détermination de $\varphi(z)$ égale à $+1$, et décrivons d'abord l'arc d'intégration jusqu'au point α, puis le petit arc $\alpha\beta$ de centre 1, puis le segment βO le long duquel la détermination de $\varphi(z)$ est devenue négative, enfin le lacet L. Faisons alors tendre vers zéro le rayon de l'arc $\alpha\beta$; nous aurons à la

limite, en désignant par I_L l'intégrale prise le long du lacet avec la détermination initiale $+1$ de $\varphi(z)$,

$$I_2 + I_1 - I_L = 0.$$

Le long de L on a d'ailleurs $z = \rho e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $dz = e^{i\frac{2\pi}{3}} d\rho$, d'où

$$I_L = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^3}} = (-1 + i\sqrt{3})I_1,$$

et finalement

$$I_2 = (-2 + i\sqrt{3})I_1.$$

Remarque. — Si on voulait calculer à $\frac{1}{20}$ près les parties réelle et imaginaire de I_2, il serait nécessaire de calculer I_1 avec une approximation supérieure à celle que nous avons obtenue ; il suffirait pour cela de conserver un terme de plus dans le développement de $f(t)$.

TABLE ANALYTIQUE

Les problèmes sont classés dans cette table conformément au plan adopté pour le *Précis d'Analyse mathématique*. Les renvois sont faits aux numéros des problèmes.

LIVRE V. — *Équations aux dérivées partielles.*